УДК 517.9

А. И. Скрипник

О некоторых алгебрах, связанных с асимптотическими методами нелинейной механики

Весьма эффективным средством исследования решений уравнений нелинейной механики являются методы асимптотических разложений по степеням малого параметра [1]. Эти методы используются для изучения нелинейных колебаний, описываемых различными классами дифференциальных уравнений. В настоящей работе для определенного класса уравнений нелинейных колебаний, включающего в частности уравнение Ван-дер-Поля, исследуются алгоритмы построения асимптотических решений. Оказывается, что асимптотические решения для данного класса уравнений могут быть получены посредством вычислений в некоторых алгебрах, являющихся дистрибутивными полукольцами.

1. Метод построения асимптотических решений уравнений нелинейной механики [1] рассмотрим, для простоты, для случая дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания в некоторых системах, близких к линейным. Общее решение дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр и f принадлежит некоторому множеству функций G, представляется в виде асимптотического разложения

$$x=\frac{1}{2}\,ae^{i\psi}+\frac{1}{2}\,ae^{-i\psi}+\varepsilon^jU_j\,(a,\psi), \tag{2}$$

в котором $U_j\,(a,\ \psi)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ — периодические функции угла ψ, а величины a, ψ, как функции времени, определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon^jA_j\,(a),\quad \frac{d\psi}{dt}=\omega+\varepsilon^jB_j\,(a). \tag{3}$$

Примечание 1. В настоящей работе для сокращенной записи сумм используем обозначения, аналогичные индексным обозначениям тензорного анализа. Эти обозначения основаны на следующих соглашениях:

1. По каждому индексу, встречающемуся дважды, один раз внизу и один раз наверху (немому) производится формальное суммирование от 1 до ∞.

2. Всякий индекс, встречающийся только внизу или только наверху (свободный), пробегает все значения от 1 до ∞, так, что уравнение со свободным индексом — сокращенная запись счетной системы уравнений.

3. Выражение $X_i * Y_i$ — обозначение свертки последовательностей X_i и Y_i.

Рассматриваемые в работе алгебры появляются в связи с реализацией на ЭВМ (см. [2]) алгоритма определения функций $U_j(a, \psi)$, $A_j(a)$, $B_j(a)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ по асимптотическому методу Крылова — Боголюбова — Митропольского. Математическим операциям дифференцирования, интегрирования, разложения в ряд Тейлора, Фурье и т. п. в этих алгебрах соответствуют такие операции, каждая из которых совпадает с исходной только на некотором классе функций.

2. Рассмотрим произвольные множество X и алгебру A с бинарной операцией μ. На конечных, непустых, упорядоченных подмножествах декартового произведения $A \times X$, содержащих для каждого $x \in X$ не более одного элемента вида (a, x) из $A \times X$, определим новую алгебру $\mathrm{I}(A, X)$. Бинарная операция произведения на основании $\mathrm{I}(A, X)$ определяется следующим образом. Если сомножители, множества u и v, не содержат элементов с одинаковыми проекциями на X, то их произведением по определению является теоретико-множественное объединение. Порядок на $u \cup v$ задается продолжением порядка элементов множеств u, v на $u \cup v$ и условием, по которому каждый элемент из u предшествует всем элементам из v. Пусть множества u и v содержат элементы с одинаковыми вторыми координатами. Тогда всякому $(a, x) \in u$, для которого существует элемент вида $(b, x) \in v$, поставим в соответствие элемент $(ab\mu, x)$ и остальным элементам из u поставим в соответствие сами элементы. Образ множества u относительно построенного соответствия обозначим u'. Построенное отображение множества u на множество u' взаимно-однозначно. Порядок на элементах u' определим так, чтобы это отображение являлось изоморфизмом упорядоченных множеств u и u'. Рассмотрим упорядоченное подмножество элементов v, вторые координаты которых отличны от всех вторых координат элементов множества u. Если обозначить это множество через v', то множества u', v' не содержат элементов с совпадающими проекциями на X. По определению, произведением множеств u и v является прозведение множеств u' и v'. Построенная однозначная операция и составляет сигнатуру алгебры $\mathrm{I}(A, X)$. Алгебры $I(A, X)$ и A однотипны. Поэтому если A — группоид, то $I(A, X)$ — также группоид. Непосредственно из определения получаем следующие свойства.

Лемма 1. *$I(A, X)$ — полугруппа тогда и только тогда, когда A — полугруппа. При этом, если A — полугруппа и множество X содержит более одного элемента, то в полугруппе $I(A, X)$ всегда отсутствуют центральные элементы и, притом если A даже коммутативна. В случае, когда полугруппа A коммутативна, в $I(A, X)$ выполняется тождественное соотношение*

$$xyx = xxy. \tag{5}$$

Пусть N^+ = аддитивная полугруппа натуральных чисел и Λ — множество тождественных соотношений, состоящее из (5). Тогда полугруппа $I(N^+, X)$ — свободная полугруппа примитивного класса с множеством тождественных соотношений Λ. Для доказательства можно воспользоваться теоремой 9.1. из [3].

Пример. Пусть $X = \{x, y, z\}$ и N^+ — аддитивная, а N° — мультипликативная полугруппы натуральных чисел. Если $t \in X$ и $n \in N$, а $N =$

$= N^+$ или $N°$, то элементы (n, t) декартового произведения $N \times X$ будем записывать nt без скобок и запятой. Упорядоченные множества $\langle 3x, 4z\rangle$ и $\langle 2z, 7y, 5x\rangle$ принадлежат основанию алгебр $I(N, X)$. Произведением этих множеств будут в алгебре $I(N^+, X)$ множество $\langle 8x, 6z, 7y\rangle$ и в алгебре $I(N°, X)$ множество $\langle 15x, 8z, 7y\rangle$. Произведением $\langle 3z, 2y, 5x\rangle$ и $\langle 2y, 3z\rangle$ будут в $I(N^+, X)$ множество $\langle 6z, 4y, 5x\rangle$, в I $(N°, X)$ множество $\langle 9z, 4y, 5x\rangle$.

Заметим, что одинаковые подмножества декартового произведения $A \times X$ являются различными, в зависимости от определенного на их элементах порядка, элементами основания алгебры $I(A, X)$. Если упорядоченное множество принадлежит основанию $I(A, X)$, то все множества, состоящие из тех же элементов (равнообъемные), но имеющие всякую другую структуру порядка, принадлежат основанию алгебры. Структуры порядков двух различных множеств основания алгебры не связаны друг с другом. Пусть на множестве $A \times X$ определена структура порядка. Рассмотрим подмножество I_1 элементов основания $I(A, X)$, имеющих структуру порядка, индуцированную структурой порядка, определенной на $A \times X$. Операция произведения в алгебре $I(A, X)$ такова, что для структур порядков сомножителей она однозначно определяет структуру порядка их произведения и поэтому, в общем случае, множество I_1 не замкнуто относительно этой операции. В I_1 определим другую бинарную операцию, которую назовем также произведением. Для всяких элементов из I_1 их произведением в I_1 является множество, равное произведению этих элементов в алгебре $I(A, X)$ со структурой порядка, индуцированной структурой порядка $A \times X$. Множество I_1 замкнуто относительно введенного произведения. Рассмотрим алгебру $I[A, X]$ с основанием I_1 и сигнатурой, состоящей из этого произведения. Алгебры $I(A, X)$ и $I[A, X]$ однотипны и связаны следующим образом.

Л е м м а 2. *Существует конгруенция* λ *в алгебре* $I(A, X)$ *такая, что фактор-алгебра* $I(A, X)/\lambda$ *изоморфна* $I[A, X]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упорядоченных множеств $u, v \in I(A, X)$ бинарное отношение λ, определяемое «$u\lambda v \Leftrightarrow u$ и v равнообьемны»,— отношение эквивалентности в $I(A, X)$. Из определения произведения в алгебре $I(A, X)$ следует, что λ — также конгруенция. Каноническое отображение основания алгебры $I[A, X]$ на основание фактор-алгебры $I(A, X)/\lambda$— нужный изоморфизм между $I[A, X]$ и $I(A, X)/\lambda$.

Л е м м а 3. *Алгебра* $I[A, X]$ — *полугруппа (коммутативная полугруппа) тогда и только тогда, когда* A — *полугруппа (коммутативная полугруппа).*

П р и м е р. Пусть $X = \{x, y, z\}$ и N, как и раньше, аддитивная N^+ либо мультипликативная N^0 полугруппа натуральных чисел. Множество $N \times X$ можно упорядочить следующим образом. Если на множестве X задать структуру порядка $\leqslant$, например, $x \leqslant y \leqslant z$, то условие $ms \prec nt \Leftrightarrow s \leqslant t$ длл всех $m, n \in N$ и $s, t \in X$ определяет на $N \times X$ некоторую структуру порядка $\prec$. При этой структуре порядка на $N \times X$, например множества $\langle 2z, 7y, 5x\rangle$ и $\langle 3z, 2y\rangle$ не принадлежат алгебрам $I[N^+, X]$ и $I[N^0, X]$. Множества $\langle 2x, 7z\rangle$ и $\langle 3y, 2z\rangle$ принадлежат этим алгебрам и их произведением в $I[N^+, X]$ будет $\langle 2x, 3y, 9z\rangle$.

Рассмотрим произвольную алгебру с носителем A и системой операций Ω. Обозначим множество производных операций этой алгебры (см. [4]) через $\bar{\Omega}$. Пусть A^k — декартовая степень множества A и Ω_1 —произвольное подмножество $\bar{\Omega}^k$, где k — натуральное число. На множестве A^k определим алгебру, система операций которой совпадает с Ω_1. Для каждого $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \in \Omega_1$, для которого хотя бы одно n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — арность операции ω_i — отлично от нуля, зададим множество матриц Θ_ω, $\Theta_\omega = \{\Theta_\omega^{(i)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где $\Theta_\omega^{(i)} = \{\theta_{lm}^{(i)} \overset{\mathrm{df}}{=} 0,1;\ l = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots$

..., $k\}$, элементы которых упорядочены, а также удовлетворяют условиям $\sum\limits_{l,m}\theta_{lm}^{(i)}=n_i$ $(i=1, 2, ..., k)$, и для всякого l существуют m, i такие, что $\theta_{lm}^{(i)}=1$. Натуральное число n — арность операции w. Пусть $a_1, a_2, ... a_n \in A^k$ и $a_i=(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik})$ $(i=1, 2, ..., n)$, тогда l — координата элемента $a_1 a_2 ...$ $... a_n \omega$ $(l=1, 2, ..., k)$ есть, по определению, результат применения операции ω_l к упорядоченному подмножеству элементов множества $\{a_{ij}; i = 1, 2, ..., n;\ j=1, 2, ..., k\}$, которое определяется следующим образом. Всякому элементу $\theta_{pq}^{(l)}$ матрицы $\Theta_w^{(l)}$, равному 1, ставится в соответствие элемент a_{pq} множества $\{a_{ij}\}$. Затем, на подмножестве этих элементов структура порядка определяется так, чтобы указанное соответствие упорядоченных подмножеств было изоморфизмом. В случае, когда все ω_i — 0-арные операции, фиксирующие в A элементы 0_i $(i=1, 2, ..., k)$, операция ω — 0-арна и фиксирует в A^k элемент $(0_1, 0_2, ..., 0_k)$. Непосредственно из определения операций по элементах $\omega \in \Omega_1$ видно, что они 0-арны только в этом случае. Структуру порядка на элементах матриц $\Theta_\omega^{(i)}$ для всех ω и i определим по правилу: элемент $\theta_{lm}^{(i)}$ матрицы $\Theta_\omega^{(i)}$ предшествует в смысле порядка элементу $\theta_{pq}^{(i)}$ тогда и только тогда, когда $l<p$, или, если $l=p$, когда $m<q$.

П р и м е р. Пусть множество Ω_1 — диагональ множества Ω^k и $\Theta_\omega^{(i)}$ для всех $\omega \in \Omega_1$ заданы следующим образом: для всякого i элемент $\theta_{lm}^{(i)}$ матрицы $\Theta_\omega^{(i)}$ равен 1, если $m=i$, и равен 0, если $m \neq i$. В этом случае определенная выше алгебра с носителем A^k и системой операций Ω_1 совпадает с прямой степенью A^k алгебры A (см. [5]).

П р и м е ч а н и е 2. Случай, когда матрицы $\Theta_\omega^{(i)}=\{\theta_{lm}^{(i)}\}$ для всех ω и i заданы так, что $\theta_{lm}^{(i)}=1$, если $m=i$, будем называть почтипрямой степенью алгебры A. В зависимости от множества Ω_1 можно рассматривать почтипрямое произведение алгебры на свою подалгебру или почтипрямое произведение двух различных подалгебр некоторой алгебры. Ясно, что при этом на операции из Ω_1 нужно накладывать дополнительные условия.

Пусть X — произвольное упорядоченное множество. Для произвольного группоида A на основании группоида $I[A, X]$ можно определить порядок так, чтобы $I[A, X]$ был упорядоченным (см. [4, 6]) группоидом. Это позволяет при произвольных группоидах A и B рассматривать группоиды $I(A, I[B, X]]$ и $I(A, I[B, X])$. Если A — дистрибутивное полукольцо, а B — полугруппа, то $I[A, I[B, X]]$ и $I(A, I[B, X])$ — дистрибутивные полукольца. Если A — кольцо целых чисел, то в $I[A, I[B, X]]$ существует отношение эквивалентности π, являющееся конгруэнцией, для которого фактор-алгебра $I[A, I[B, X]]/\pi$ изоморфна целочисленному полугрупповому кольцу (см. [7]) полугруппы $I[B, X]$.

Подводя итог сказанному, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Если множество функций G — множество полиномов с рациональными коэффициентами, то асимптотические решения для уравнения* (1) *могут вычисляться в дистрибутивных полукольцах, являющихся почтипрямым произведением алгебр вида $I[A, I[B, X]]$, $I(A, I[B, X])$, при A, B либо аддитивных и мультипликативных полугруппах натуральных чисел, либо конечных полугруппах.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.
2. С к р и п н и к А. И. Проблемно-ориентированное программное обеспечение для асимптотических методов нелинейной механики.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 2, с. 133—136.

3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп.— М.: Мир, 1972, т. 2.— 422 с.
4. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре.— М.: Наука, 1973.— 400 с.
5. Кон П. Универсальная алгебра.— М.: Мир, 1968.— 352 с.
6. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.— М.: Мир, 1965.—342 с.
7. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года.— М.: Наука, 1974.— 160 с.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию
27.VI 1979 г.