УДК 517.53

Г. И. Сижук, П. И. Сижук

К теории специальных классов аналитических функций

Пусть B — класс функций $\beta(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots$, регулярных в круге $|z| < 1$ и таких, что $|\beta(z)| < 1$ при $|z| < 1$; P — класс функций $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$, регулярных в круге $|z| < 1$ и таких, что $\operatorname{Re} p(z) > 0$ при $|z| < 1$. Известно (см., например, [1, с. 199, 478]), что $|\beta_n| \leqslant 1$ и $|p_n| \leqslant 2$, $n = 1, 2, \ldots$ Определим для целого $m \geqslant 1$ и каждого $b \in (0, 1)$ следующие классы функций:

1) класс $B(m, b)$ функций $\beta(z) = \beta_1 z^m + \beta_2 z^{2m} + \ldots \in B$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{z \to 0} |\beta(z)/z^m| = b$;

2) класс $P(m, b)$ функций $p(z) = 1 + p_1 z^m + p_2 z^{2m} + \ldots \in P$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{p(z) - 1}{z^m} \right| = 2b; \tag{1}$$

3) класс $\tilde{P}(m, b)$ функций $p(z) = 1 + p_1 z^m + p_2 z^{m+1} + \ldots \in P$, удовлетворяющих условию (1).

Классы $B(m, b)$, $P(m, b)$ и $\tilde{P}(m, b)$ играют важную роль при изучении экстремальных свойств специальных классов регулярных в круге $|z| < 1$ функций с разложением вида $f(z) = z + c_1 z^{m+1} + \ldots$ в зависимости от $|c_1|$. Начало исследований классов $B(m, b)$ и $P(m, b)$ положено в работе [2].

В данной заметке, опираясь на результат статьи [2], при фиксированном $z_0 \neq 0$ из круга $|z| < 1$ находим множество значений функционала $\zeta = z_0 \beta'(z_0)$ на классе функций $\beta(z) \in B(m, b)$ и принимающих в точке z_0 одно и то же заданное значение. На этой основе затем получаем аналогичный результат в классах $\tilde{P}(m, b)$ (теорема 2) и $P(m, b)$ (теорема 3). Теорема 2 усиливает, а теорема 3 уточняет соответствующие теоремы из работы [2].

1. К л а с с $B(m, b)$. В работе [2] установлено, что при заданном $z_0 \neq 0$ из круга $|z| < 1$ множеством значений функционала $\omega = \beta(z_0)$ на классе $B(m, b)$ является кольцо

$$\varphi_0(r, b) \leqslant |\omega| \leqslant \varphi(r, b), \tag{2}$$

где

$$\varphi_0(r, b) = \begin{cases} \psi(r, b) & \text{при } \ 0 < r < \sqrt[m]{b}, \\ 0 & \text{при } \ \sqrt[m]{b} \leqslant r < 1, \end{cases}$$

$$\varphi(r, b) = r^m \frac{b + r^m}{1 + b r^m}, \quad \psi(r, b) = r^m \frac{b - r^m}{1 - b r^m}, \quad r = |z_0|. \tag{3}$$

Зафиксируем какое-нибудь значение ω_0 из кольца (2) и положим

$$\nu = \arg \frac{\omega_0}{z_0^m}, \quad \gamma_0 = \arccos \frac{(b^2 - r^{2m}) r^{2m} + (1 - b^2 r^{2m}) |\omega_0|^2}{2br^m (1 - r^{2m}) |\omega_0|},$$

$$A = e^{i\theta} \frac{\omega_0 - bz_0^m e^{i\gamma}}{z_0^m (z_0^m e^{i\gamma} - b\omega_0)}, \quad c = \frac{(1 - |z_0|^{2m}) A + (1 - |A|^2) z_0^m}{1 - |Az_0^m|^2}.$$

Здесь θ и γ — произвольные вещественные постоянные, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\gamma \in \Gamma$, где Γ — полусегмент $-\pi + \nu < \gamma \leqslant \pi + \nu$, если

$$\sqrt[m]{b} \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant |\omega_0| \leqslant -\psi(r, b), \tag{4}$$

и сегмент $-\gamma_0 + \nu \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0 + \nu$, если

$$\sqrt[m]{b} \leqslant r < 1, \quad -\psi(r, b) \leqslant |\omega_0| \leqslant \varphi(r, b), \tag{5}$$

а также если

$$0 < r < \sqrt[m]{b}, \quad \psi(r, b) \leqslant |\omega_0| \leqslant \varphi(r, b). \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что при указанных ω_0, θ и γ функции вида

$$\beta(z) = z^m e^{i\gamma} \frac{b + u(z)}{1 + bu(z)}, \tag{7}$$

где

$$u(z) = u(z, \theta) = z^m e^{-i\theta} \frac{c - z^m}{1 - \bar{c}z^m} \quad (|c| < 1),$$

принадлежат классу $B(m, b)$ и принимают в точке z_0 значение ω_0. Выделим из них те функции, у которых $u(z) = u(z, \theta_k)$, где $\theta_k = \theta_k(\gamma)$, $k = 1, 2$, определяется из соотношения

$$\theta_k + \delta_k + \gamma + \nu + 2\arg\{(1 - z_0^m \bar{A})/(z_0^m e^{i\gamma} - b\omega_c)\} = \pi,$$

в котором константа δ_k такова, что $0 \leqslant \theta_k < 2\pi$ и

$$\sin \delta_k = (-1)^k \frac{(|\omega_0|^2 - r^{2m}) \sin(\nu - \gamma)}{r^{2m} + 2(-1)^k r^{2m} |\omega_0| \cos(\nu - \gamma) + |\omega_0|^2},$$

$$\cos \delta_k = \frac{2r^m |\omega_0| + (-1)^k (r^{2m} + |\omega_0|^2) \cos(\nu - \gamma)}{r^{2m} + 2(-1)^k r^m |\omega_0| \cos(\nu - \gamma) + |\omega_0|^2}.$$

Обозначим семейство всех выделенных таким образом функций через $B'(m, b, \omega_0)$.

Приведенная ниже теорема показывает, что функциями $\beta(z) \in B'(m, b, \omega_0)$ решаются в классе $B(m, b)$ задачи на условный экстремум, связанные с однозначными и непрерывными функционалами вида $\Phi(\beta(z_0), z_0\beta'(z_0))$, где $\beta(z_0) = \omega_0$, $|z_0|$ и ω_0 фиксированы.

Т е о р е м а 1. *Если в точке z_0, $0 < |z_0| = r < 1$, фиксировать значение ω_0 функции $\omega = \beta(z) \in B(m, b)$ в соответствии с (2) и заставить $\beta(z)$ пробегать тот подкласс $B(m, b, \omega_0)$ класса $B(m, b)$, все функции которого удовлетворяют условию $\omega_0 = \beta(z_0)$, то значения $\zeta = z_0\beta'(z_0)$ покрывают множество*

$$Q = \left\{\zeta : \left|\zeta - \frac{2m\omega_0}{1+b}\right| \leqslant \rho_1, \quad \left|\zeta - \frac{2m\omega_0}{1-b}\right| \geqslant \rho_2\right\},$$

где

$$\rho_1 = m\,\frac{(b + r^{2m})\, r^{2m} - (1 + br^{2m})\,|\omega_0|^2}{(1 + b)(1 - r^{2m})\, r^m},$$

$$\rho_2 = m\,\frac{|(b - r^{2m})\, r^{2m} + (1 - br^{2m})\,|\omega_0|^2\,|}{(1 - b)(1 - r^{2m})\, r^m}.$$

Каждой точке ζ *границы множества* Q *соответствует единственная функция* $\beta(z) \in B'(m, b, \omega_0)$ *такая, что* $z_0\beta'(z_0) = \zeta$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{Q}$ искомое множество значений функционала $\zeta = z_0\beta'(z_0)$ на классе $B(m, b, \omega_0)$ и покажем, что $\tilde{Q} = Q$. Введем в рассмотрение для $\gamma \in (-\pi + \nu, \pi + \nu]$ следующие классы функций:

$$B_\gamma(m, b) = \{\beta(z) \in B(m, b) : \lim_{z \to 0} \arg(\beta(z)/z^m) = \gamma\},$$

$$B_\gamma(m, b, \omega_0) = \{\beta(z) \in B_\gamma(m, b) : \beta(z_0) = \omega_0\}.$$

Легко видеть, что задаваемая формулой (7) функция $\beta(z) \in B_\gamma(m, b)$, если $u(z) \in B(m)$, где $B(m)$ обозначает класс всех функций $u(z) = \beta_1 z^m + \beta_2 z^{2m} + \ldots \in B$. Справедливо и обратное. Приняв во внимание, что при заданном z_0, $0 < |z_0| = r < 1$, множеством значений функционала $u(z_0)$ на классе $B(m)$ является круг $|u(z_0)| \leqslant r^m$, заключаем, что множество значений функционала $\beta(z_0)$ на классе $B_\gamma(m, b)$ — круг

$$\left|\beta(z_0) - z_0^m e^{i\gamma}\,\frac{b(1 - r^{2m})}{1 - b^2 r^{2m}}\right| \leqslant \frac{(1 - b^2)\, r^{2m}}{1 - b^2 r^{2m}}.$$

Следовательно, класс $B_\gamma(m, b, \omega_0)$ не пуст, если и только если $\gamma \in \Gamma$. Отсюда и из определения классов $B(m, b, \omega_0)$ и $B_\gamma(m, b, \omega_0)$ следует, что $B(m, b, \omega_0) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma(m, b, \omega_0)$ и множество $\tilde{Q}$ равно объединению всех множеств значений функционала $\zeta = z_0\beta'(z_0)$ на классах $B_\gamma(m, b, \omega_0)$, $\gamma \in \Gamma$.

Фиксируем произвольно $\gamma \in \Gamma$ и найдем множество значений $\zeta = z_0\beta'(z_0)$ на классе $B_\gamma(m, b, \omega_0)$. Учитывая устанавливаемое формулой (7) соответствие между классами $B_\gamma(m, b)$ и $B(m)$, а также существующее между классом $B(m)$ и классом—обозначим его $P(m)$ — всех функций вида $q(z) = 1 + p_1 z^m + p_2 z^{2m} + \ldots \in P$ соответствие

$$u(z) = \frac{q(z) - 1}{q(z) + 1}, \tag{8}$$

где $u(z) \in B(m)$, $q(z) \in P(m)$, находим

$$z_0\beta'(z_0) = m\omega_0 + \frac{(1 + b)(z_0^m e^{i\gamma} - \omega_0)}{2(1 - b)\, z_0^m e^{i\gamma}}\, z_0 q'(z_0). \tag{9}$$

Здесь $\beta(z) \in B_\gamma(m, b, \omega_0)$, $q(z) \in P(m)$ и

$$q(z_0) = \frac{(1 - b)(z_0^m e^{i\gamma} + \omega_0)}{(1 + b)(z_0^m e^{i\gamma} - \omega_0)}. \tag{10}$$

На основании теоремы 1 из работы [2] для $q(z) \in P(m)$ имеем

$$z_0 q'(z_0) = \frac{m}{2}(q^2(z_0) - 1) + \frac{m}{2}(\rho^2 - |q(z_0) - a|^2)\,\varepsilon e^{i\delta}, \tag{11}$$

где

$$a=\frac{1+r^{2m}}{1-r^{2m}},\quad \rho=\frac{2r^m}{1-r^{2m}},\quad r=|z_0|, \tag{12}$$

$$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1,\quad 0\leqslant\delta\leqslant 2\pi. \tag{13}$$

Равенство (11) при $\varepsilon=1$ имеет место только для функций вида

$$q(z)=\lambda\frac{1+z^m e^{-i\alpha_1}}{1-z^m e^{-i\alpha_1}}+(1-\lambda)\frac{1+z^m e^{-i\alpha_2}}{1-z^m e^{-i\alpha_2}}, \tag{14}$$

где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<2\pi$; параметры λ, α_1 и α_2 связаны условием $\lambda e^{i\alpha_2}+(1-\lambda)e^{i\alpha_1}=c$, вытекающим из (10).

Используя выражения (11), (10) и (12), после некоторых преобразований из (9) получаем

$$z_0\beta'(z_0)=C(\omega_0,\gamma)+R(\omega_0,\gamma)\,\varepsilon e^{i\delta_0}, \tag{15}$$

где

$$R(\omega_0,\gamma)=m|\omega_0|\frac{r^{2m}|1-b\eta|^2-|b-\eta|^2}{(1-b^2)(1-r^{2m})|\eta|},$$

$$C(\omega_0,\gamma)=\frac{m\omega_0}{1-b^2}\left(2-b\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)\right),\quad \eta=\frac{\omega_0}{z_0^m}e^{-i\gamma},$$

$$\delta_0=\delta+\arg\omega_0+2\arg(1-\eta)-\arg\eta. \tag{16}$$

Из (15), ввиду (13) и (16), следует, что множество значений функционала $\zeta=z_0\beta'(z_0)$ на классе $B_\gamma(m,b,\omega_0)$ есть круг $Q_\gamma:|\zeta-C(\omega_0,\gamma)|\leqslant\leqslant R(\omega_0,\gamma)$. Следовательно,

$$\tilde{Q}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Q_\gamma. \tag{17}$$

Найдем $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}Q_\gamma$. Так как ограничивающая круг Q_γ окружность — образ окружности

$$|\tau-\tilde{C}(\omega_0,\gamma)|=\tilde{R}(\omega_0,\gamma), \tag{18}$$

где

$$\tilde{R}(\omega_0,\gamma)=L+2b\cos(\nu-\gamma),\quad \tilde{C}(\omega_0,\gamma)=M_1\cos(\nu-\gamma)+iM_2\sin(\nu-\gamma),$$

$$L=\frac{(r^{2m}-b^2)\,r^{2m}-(1-b^2r^{2m})|\omega_0|^2}{r^m(1-r^{2m})|\omega_0|},$$

$$M_k=(-1)^k b\,\frac{r^{2m}-(-1)^k|\omega_0|^2}{r^m|\omega_0|},\quad k=1,2,$$

при отображении

$$\zeta=\frac{m\omega_0}{1-b^2}(2+\tau), \tag{19}$$

то достаточно найти объединение тех кругов, граничные окружности которых принадлежат семейству (18) с $\gamma\in\Gamma$.

Разыскание огибающей для семейства (18) приводит к окружностям $c_k:|\tau-(-1)^k 2b|=\rho_k$, где $\rho_k=|L+(-1)^k M_1|$, $k=1, 2$. Окружности c_1 и c_2 пересекаются в точках τ_1 и τ_2, $2b\tau_k=-LM_1+(-1)^k i\sqrt{M_2^2(4b^2-L^2)}$ при условиях (5), (6) и взаимно не пересекаются, причем окружность c_1

охватывает окружность c_2 при условиях (4). Заметив, далее, что точка $\tau = \tilde{C}(\omega_0, \gamma)$ на плоскости $\tau = u + iv$ пробегает против движения часовой стрелки весь элипс $u^2 M_1^{-2} + v^2 M_2^{-2} = 1$, когда γ изменяется от $-\pi + \nu$ до $\pi + \nu$, и его дугу от точки τ_2 до точки τ_1, когда γ изменяется от $-\gamma_0 + \nu$ до $\gamma_0 + \nu$, и изучив поведение функции $\chi(\gamma) = \tilde{R}(\omega_0, \gamma)$ при $\gamma \in \Gamma$, приходим к следующему выводу.

Объединение всех кругов, ограничиваемых окружностями семейства (18) с $\gamma \in \Gamma$, — множество $D = \{\tau : |\tau + 2b| \leqslant \tilde{\rho}_1, |\tau - 2b| \geqslant \tilde{\rho}_2\}$, представляющее собой в случаях (5) и (6) круговую луночку, а в случае (4) круговое кольцо.

Образом D при отображении (19) является множество Q, указанное в теореме. Следовательно, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Q_\gamma = Q$. Это вместе с (17) дает утверждение теоремы о множестве значений функционала $\zeta = z_0 \beta'(z_0)$ на подклассе $B(m, b, \omega_0)$ класса $B(m, b)$.

Из проведенного доказательства следует, что в числе экстремальных функций могут быть только функции (7), где $u(z) = u(z, \theta)$ принадлежит семейству функций, получаемых по формуле (8), когда $q(z)$ пробегает все функции вида (14). Простые вычисления показывают, что каждой граничной для Q точке окружности $|\zeta - 2m\omega_0/(1 - (-1)^k b)| = \rho_k$ $(k = 1, 2)$ соответствует единственная функция вида (7) с надлежащими γ и $u(z)$, $\gamma \in \Gamma$, $u(z) = u(z, \theta_k)$ $(k = 1, 2)$, т. е. функция из семейства $B'(m, b, \omega_0)$. Теорема доказана.

2. Класс $\tilde{P}(m, b)$. Можно показать, что формула

$$p(z) = \frac{1 + z^{m-1}\beta(z)}{1 - z^{m-1}\beta(z)}, \tag{20}$$

где $\beta(z)$ пробегает класс $B(1, b)$, структурная для класса $\tilde{P}(m, b)$. Следовательно, на классе $\tilde{P}(m, b)$ множество значений функционала $w = p(z_0)$ представляет собой кольцо

$$T_w(\tilde{\sigma}_1; \tilde{\sigma}_2) = \{w : |w - a(\tilde{\sigma}_1)| \geqslant \rho(\tilde{\sigma}_1), \ |w - a(\tilde{\sigma}_2)| \leqslant \rho(\tilde{\sigma}_2)\}, \tag{21}$$

где

$$a(\sigma) = \frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2}, \quad \rho(\sigma) = \frac{2\sigma}{1 - \sigma^2}, \quad \tilde{\sigma}_1 = \begin{cases} \tilde{\sigma}_0 & \text{при } 0 < r < b; \\ 0 & \text{при } b \leqslant r < 1, \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_0 = r^m \frac{b - r}{1 - br}, \quad \tilde{\sigma}_2 = r^m \frac{b + r}{1 + br}.$$

Согласно формуле (20), для функции $p(z)$ из класса $\tilde{P}(m, b)$, принимающей в точке z_0 значение w_0 из кольца $T_w(\tilde{\sigma}_1; \tilde{\sigma}_2)$, имеем

$$z_0 p'(z_0) = \frac{m-1}{2}(w_0^2 - 1) + \frac{1}{2} z_0^{m-1}(w_0 + 1)^2 \zeta,$$

где $\zeta = z_0 \beta'(z_0)$, $\beta(z)$ — функция класса $B(1, b)$, соответствующая $p(z)$ по (20). Отсюда по теореме 1, применив ее к классу $B(1, b)$ с $w_0 = (w_0 - 1)/(w_0 + 1) z_0^{m-1}$, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если в точке z_0, $0 < |z_0| = r < 1$, фиксировать значение w_0 функции $w = p(z) \in P(m, b)$ из кольца $T_w(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ и заставить $p(z)$ пробегать тот подкласс $\tilde{P}(m, b, w_0)$ класса $\tilde{P}(m, b)$, все функции которого* *удовлетворяют условию $w_0 = p(z_0)$, то значения $\xi = z_0 p'(z_0)$ покрывают множество*

$$\tilde{K} = \left\{\xi : \left|\xi - \left(\frac{m-1}{2} + \frac{1}{1+b}\right)(w_0^2 - 1)\right| \leqslant \tilde{R}_1, \left|\xi - \left(\frac{m-1}{2} + \frac{1}{1-b}\right)(w_0^2 - 1)\right| \geqslant \tilde{R}_2\right\},$$

где

$$\tilde{R}_1 = \frac{r^{2m}(b + r^2)\,|w_0 + 1|^2 - (1 + br^2)\,|w_0 - 1|^2}{2(1+b)(1-r^2)\,r^m},$$

$$\tilde{R}_2 = \frac{|r^{2m}(b - r^2)\,|w_0 + 1|^2 + (1 - br^2)\,|w_0 - 1|^2|}{2(1-b)(1-r^2)\,r^m}.$$

Каждой точке ξ границы множества $\tilde{K}$ соответствует единственная функция $p(z)$ вида (20) с надлежащей функцией $\beta(z) \in B'(1, b, \omega_0)$, где $\omega_0 = (w_0 - 1)/(w_0 + 1)\, z_0^{m-1}$, принадлежащая подклассу $\tilde{P}(m, b, w_0)$ и такая, что $z_0 p'(z_0) = \xi$.

3. К л а с с $P(m, b)$. Известно [2], что при заданном z_0, $0 < |z_0| = r < 1$, множество значений функционала $w = p(z_0)$ на классе $P(m, b)$ есть кольцо (см. (21)) $T_w(\sigma_1; \sigma_2)$, где $\sigma_1 = \varphi_0(r, b)$, $\sigma_2 = \varphi(r, b)$, $\varphi_0(r, b)$ и $\varphi(r, b)$ определены в (3). Учитывая существующее между классами $P(m, b)$ и $B(m, b)$ взаимно однозначное соответствие

$$p(z) = \frac{1 + \beta(z)}{1 - \beta(z)},\ p(z) \in P(m, b),\ \beta(z) \in B(m, b), \tag{22}$$

непосредственно из теоремы 1 имеем в классе $P(m, b)$ такой результат (ср. с теоремой 3 [2]).

Т е о р е м а 3. *Если в точке z_0, $0 < |z_0| = r < 1$, фиксировать значение w_0 функции $w = p(z) \in P(m, b)$ из кольца $T_w(\sigma_1; \sigma_2)$ и заставить $p(z)$ пробегать тот подкласс $P(m, b, w_0)$ класса $P(m, b)$, все функции которого удовлетворяют условию $w_0 = p(z_0)$, то значения $\xi = z_0 p'(z_0)$ покрывают множество*

$$K = \left\{\xi : \left|\xi - \frac{m}{1+b}(w_0^2 - 1)\right| \leqslant R_1, \left|\xi - \frac{m}{1-b}(w_0^2 - 1)\right| \geqslant R_2\right\},$$

где

$$R_1 = m\,\frac{r^{2m}(b + r^{2m})\,|w_0 + 1|^2 - (1 + br^{2m})\,|w_0 - 1|^2}{2(1+b)(1-r^{2m})\,r^m},$$

$$R_2 = m\,\frac{|r^{2m}(b - r^{2m})\,|w_0 + 1|^2 + (1 - br^{2m})\,|w_0 - 1|^2|}{2(1-b)(1-r^{2m})\,r^m}.$$

Каждой точке ξ границы множества K соответствует единственная функция $p(z)$ вида (22) с надлежащей функцией $\beta(z) \in B'(m, b, \omega_0)$, где $\omega_0 = (w_0 - 1)/(w_0 + 1)$, принадлежащая подклассу $P(m, b, w_0)$ и такая, что $z_0 p'(z_0) = \xi$.

Теоремы 1—3 могут быть полезны при решении экстремальных задач в классах $B(m, b)$, $P(m, b)$, $\tilde{P}(m, b)$ и связанных с ними классах аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 628 с.

2. Зморович В. А., Коробкова И. К. К теории аналитических функций с положительной вещественной частью в круге.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 4, с. 545—549.

Ставропольский
педагогический институт

Поступила в редакцию
17.IV 1978 г.