УДК 519.44

Я. Л. Фельдман

$\mathfrak{X}\mathfrak{F}$-инъекторы конечных групп

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Будем говорить, что группа G имеет $C_{\mathfrak{F}}$-свойство, если в ней существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два $\mathfrak{F}$-инъектора в группе G сопряжены. Основополагающая теорема теории классов Фиттинга (см. [1]) гарантирует, что каждая разрешимая группа имеет $C_{\mathfrak{F}}$-свойство. Двойственный к этому результат В. Гашюца из теории формаций расширен независимо в работах [2] и [3], где установлено, что для того, чтобы группа G имела $\mathfrak{H}$-проекторы и любые два $\mathfrak{H}$-проектора в G были сопряжены, достаточно разрешимости $\mathfrak{H}$-корадикала $G^{\mathfrak{H}}$, где $\mathfrak{H}$ — локальная формация. Естественно и для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ поставить вопрос: если фактор-группа по $\mathfrak{F}$-радикалу $G/G_{\mathfrak{F}}$ разрешима, то сама группа G имеет $C_{\mathfrak{F}}$-свойство?

Для локально определенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ положительный ответ можно получить из основной теоремы работы [4]. Однако, как отмечалось в работе [5], не каждый даже замкнутый относительно подгрупп класс Фиттинга локально определен.

В этой работе данный вопрос изучается для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, равного произведению $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{G : G/G_{\mathfrak{X}} \in \in \mathfrak{Y}\}$. В частности, установлено, что если группа G такова, что фактор-группа $G/G_{\mathfrak{X}}$ разрешима и $\mathfrak{Y} \supseteq \mathfrak{N}$, то группа G обладает $C_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$-свойством. Указано строение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъекторов. Здесь и далее $\mathfrak{N}$ обозначает класс нильпотентных групп, $\mathfrak{N}_\pi$ — класс нильпотентных π-групп. Все определения и обозначения см. в работе [5].

Лемма 1. *Пусть G — группа, $F(G) \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ и фактор-группа G/H разрешима. Тогда $C_G(H) \subseteq H$.*

Доказательство. Обозначим $\Phi(G) = \Phi$, $F(G) = F$. Тогда $\Phi \subseteq F \subseteq H$. В лемме работы [6] содержится следующий результат: если S/Φ — произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ, то $C_G(S) \subseteq S$. Поэтому достаточно доказать, что $H \supseteq S$. Пусть N/Φ — минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ. Предположим, что $N \not\subseteq \not\subseteq H$. Тогда $N \cap H = \Phi$ и $N/\Phi \cong NH/H$. Но NH/H — минимальная нормальная подгруппа разрешимой группы G/H и потому абелева. Значит и N/Φ абелева, откуда, по известной теореме Гашюца [7], подгруппа N нильпотентна. Но тогда $N \subseteq F \subseteq H$,— противоречие. Таким образом, $N \subseteq H$, и ввиду произвольности выбора подгруппы N/Φ, $S \subseteq H$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть G — группа, $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}_\pi$, где $\pi = \pi(G/G_{\mathfrak{F}})$. Если фактор-группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ разрешима, то $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.*

В самом деле, пусть $F(G) = F = F_\pi F_{\pi'}$, где F_π — π-холловская подгруппа из F. Ясно, что $F_\pi \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и, так как $F/F \cap G_{\mathfrak{F}} \cong FG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_\pi$, то $F_{\pi'} \subseteq F \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $F \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и согласно лемме 1, $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 2. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, $\mathfrak{Y} \supseteq \mathfrak{N}_\pi$, где $\pi = \pi(G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}})$. Если группа $G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ разрешима и $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \subseteq V \subseteq G$, тогда:*

1) $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$;

2) *подгруппа V — $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальна в G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-максимальна в $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. 1) Пусть $H = G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ и $K = G_{\mathfrak{X}} = H_{\mathfrak{X}}$. Так как $H/K = (G/K)_{\mathfrak{Y}}$ и $(G/K)/(G/K)_{\mathfrak{Y}} \cong G/H$ — разрешимая группа, то, ввиду следствия 1, $C_{G/K}(H/K) \subseteq H/K$. Поскольку $[V_{\mathfrak{X}}, H] \subseteq V_{\mathfrak{X}} \cap H = H_{\mathfrak{X}} = K$, то $V_{\mathfrak{X}} \subseteq C_G(H/K) \subseteq H$. Следовательно, $V_{\mathfrak{X}} \subseteq H_{\mathfrak{X}}$. Обратное включение очевидно.

2) Предположим, что V — $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальная подгруппа группы G. Согласно предыдущему пункту $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$ и поэтому $V/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Если $V/G_{\mathfrak{X}} \subseteq W/G_{\mathfrak{X}} \subseteq G/G_{\mathfrak{X}}$ и $W/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$, то $W_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$ влечет $W \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Следовательно, $W = V$ и, значит, $V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-максимальна в $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Наоборот, пусть $V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-максимальна в $G/G_{\mathfrak{X}}$. Равенство $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$ влечет $V \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Если $V \subseteq W \subseteq G$ и $W \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, то $W_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$ и $W/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Отсюда $W = V$, и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, $\mathfrak{Y} \supseteq \mathfrak{N}_\pi$, где $\pi = \pi(G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}})$, и группа $G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ разрешима. Если группа $G/G_{\mathfrak{X}}$ имеет $C_{\mathfrak{Y}}$-свойство, тогда группа G имеет $C_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$-свойство, причем подгруппа V из G тогда и только тогда $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор группы G, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. По условию группа $G/G_{\mathfrak{X}}$ обладает $\mathfrak{Y}$-инъекторами; пусть $V/G_{\mathfrak{X}}$ — один из них. Покажем, что тогда подгруппа V будет $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектором группы G. Пусть N — произвольная субнормальная подгруппа группы G. Тогда $N_{\mathfrak{X}} = N \cap G_{\mathfrak{X}}$ и $N/N_{\mathfrak{X}} \cong NG_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}$. Подгруппа $V \cap N/N_{\mathfrak{X}}$ из $N/N_{\mathfrak{X}}$ изоморфна подгруппе $(V \cap N)G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}$, являющейся, очевидно, $\mathfrak{Y}$-инъектором группы $NG_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $V \cap N/N_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-инъектор, а значит, и $\mathfrak{Y}$-максимальная подгруппа группы $N/N_{\mathfrak{X}}$. Так как $N_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} = G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \cap N \subseteq V \cap N$ и $N/N_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \cong NG_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ — разрешимая группа, то согласно лемме 2, $V \cap N$ — $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальная подгруппа в N. Тем самым доказано, что подгруппа V — $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор группы G.

Наоборот, предположим, что подгруппа V — $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор группы G. Покажем, что $V/G_{\mathfrak{X}}$ будет $\mathfrak{Y}$-инъектором группы $G/G_{\mathfrak{X}}$. Пусть $N/G_{\mathfrak{X}}$ — произвольная субнормальная подгруппа из $G/G_{\mathfrak{X}}$. Тогда снова $N_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} = N \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \subseteq N \cap V$ и, согласно лемме 2, $(N \cap V)_{\mathfrak{X}} = N_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Поскольку $N \cap V$, будучи $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектором в N, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальна в N, то $N \cap V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-максимальна в $N/G_{\mathfrak{X}}$. Таким образом, $V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Пусть V_1 и V_2 — различные $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъекторы группы G. Тогда подгруппы $V_1/G_{\mathfrak{X}}$ и $V_2/G_{\mathfrak{X}}$, будучи $\mathfrak{Y}$-инъекторами группы $G/G_{\mathfrak{X}}$, обладающей $C_{\mathfrak{Y}}$-свойством, сопряжены в ней. Следовательно, подгруппы V_1 и V_2 сопряжены в группе G. Теорема доказана.

Из этой теоремы и результата Фишера — Гашюца — Хартли (см. [1]) получаем следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, $\mathfrak{Y} \supseteq \mathfrak{N}$. Если фактор-группа $G/G_{\mathfrak{X}}$ разрешима, то группа G имеет $C_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$-свойство, причем подгруппа V — $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор в G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{Y}$-инъектор в $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

Отметим, что для разрешимой группы G такое строение $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-инъекторов получено в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen.— Math. Z., 1967, **102**, 5, S. 337—339.
2. Шмигирев Э. Ф. О некоторых вопросах теории формаций.— В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975, с. 211—225.
3. Schmid P. Lokale Formationen endlicher Gruppen.— Math. Z., 1974, **137**, 1, S. 31—48.
4. Schnackenberg F. R. Injectors of finite groups.— J. Algebra, 1974, **30**, 1—3, p. 548—558.

5. H a r t l e y B. On Fischer's dualization of formation theory.— Proc. London Math. Soc., 1969, **19**, 2, p. 193—207.
6. Ш е м е т к о в Л. А. Внешняя насыщенность однородных формаций.— В кн.: Всесоюзный алгебраический симпозиум: Тез. докл. Гомель: Наука и техника, 1975, ч. 1, с. 79.
7. G a s c h ü t z W. Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen.— Math. Z., 1953, **58**, S. 160—170.

Укргипроинжпроект
МЖКХ УССР

Поступила в редакцию
9.VIII.1978 г.