УДК 517.944

Н. Н. Чаус

О поведении на бесконечности решений одного класса систем уравнений с переменными коэффициентами

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)u, \tag{1}$$

где $P\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ — матрица размера $N \times N$, элементы которой — полиномы от $\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ с коэффициентами, зависящими от $x \in E^1$. Всюду в дальнейшем переменные изменяются в области G: $x > 0, 0 \leqslant t_i \leqslant 1, -\infty < y_j < \infty$. Допускаются случаи, когда есть только переменные t_i или только переменные y_j. В работе устанавливается, что для решения $(u_1, \cdots, u_N)$ системы (1) в области G при наличии оценки вида

$$|u_i| \leqslant C\exp\{-x^{q_1+\varepsilon} + a\|y\|^q\} \; (C, \varepsilon > 0, i = 1, \cdots, N) \tag{2}$$

будет $u \equiv 0$. Доказываемая ниже теорема примыкает к исследованиям ряда авторов [1—9], в работах которых рассматриваются решения различных уравнений или систем уравнений с частными производными в бесконечных областях и, в частности, устанавливаются оценки, при наличии которых решение может быть лишь тривиальным. Круг результатов по названному вопросу можно характеризовать такими известными фактами из теории функций комплексной переменной как теорема Лиувилля и теорема Фрагмена — Линделефа.

Параметры q и q_1 в (2) определяются системой (1) и, в частности, зависят от поведения коэффициентов в ней при $x \to \infty$. Будем предполагать, что каждый коэффициент $a(x)$ в элементе P_{ij} $(i, j = 1, \ldots, N)$ матрицы P непрерывен и допускает степенную мажорацию, т. е. $|a(x)| \leqslant a_0(1+x)^\alpha$ с какими-то a_0, $\alpha \geqslant 0$, зависящими от $a(x)$. Опишем, как по матрице P определяются те q и q_1, для которых справедливо основное утверждение. Для этого в элементах P_{ij} матрицы P заменим все коэффициенты их мажорантами, в том числе все постоянные коэффициенты — их модулями. Полученную матрицу назовем мажорирующей матрицу $P\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ и обозначим $P_0 = P_0\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Рассмотрим матрицы P_0^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Каждый элемент $[P_0^n]_{ij}$ матрицы P_0^n представляет собой сумму выражений вида $a_{n_k, m_k}(x) \times \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m_k}$ (здесь $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_k}$ нужно понимать как произведение символов $\frac{\partial}{\partial t_i}$ в количестве n_k; то же для $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m_k}$). Каждый коэффициент $a_{n_k, m_k}(x)$ допускает степенную мажорацию, так что $|a_{n_k, m_k}(x)| \leqslant C^n(1+x)^{\alpha(n_k, m_k)}$. Каждому слагаемому в элементе $[P_0^n]_{ij}$ поставим в соответствие тройку чисел $(\alpha(n_k, m_k), n_k, m_k)$. Множество всех таких троек, получаемых по матрице

P_0^n, обозначим V_n. Отметим, что $\alpha(n_k, m_k) + n_k + m_k \leqslant rn + h$ с некоторыми постоянными r и h, а количество элементов в V_n не более K^n (K — const). Возьмем $q > 1$. Предположим, что для всех достаточно больших n с некоторым $q_1 > 1$ справедлива оценка

$$S_n \equiv \max_{(\alpha(n_k, m_k),\, n_k,\, m_k) \in V_n} \frac{1 + \frac{1}{n}\alpha(n_k, m_k)}{1 - \frac{1}{n}\left[n_k + \left(1 - \frac{1}{q}\right) m_k\right]} \leqslant q_1. \qquad (3)$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Всякое решение системы* (1) *в области* G, *имеющее там оценку* (2), *в которой* q, $q_1 > 1$ *и связаны условием* (3), *тождественно равно нулю.*

Заметим, что из условия (3) следует $\frac{n_k}{n} \ll 1$ при достаточно больших n, т. е. условие (3) налагает ограничение на рост степени оператора $\frac{\partial}{\partial t}$ в матрице P_0^n при $n \to \infty$. Иными словами, область G для системы уравнений может рассматриваться лишь такая, чтобы в матрице P_0^n не было производных степени n или больше n по переменным, изменяющимся в конечных пределах. Если это условие выполнено, то условие (3) всегда имеет место при q, достаточно близких к единице и соответствующих q_1.

Перед доказательством теоремы рассмотрим примеры.

1) Пусть коэффициенты в системе (1) ограничены. Тогда $P_0\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ — матрица с постоянными коэффициентами и $\alpha(n_k, m_k) \equiv 0$. Если обозначить через p_t приведенный порядок по $\frac{\partial}{\partial t}$ системы уравнений с матрицей P_0, а через p_y — приведенный порядок такой системы по $\frac{\partial}{\partial y}$ [9], то $n_k \leqslant p_t n + h$, $m_k \leqslant p_y n + h$ (h — const). В результате при достаточно большом n

$$S_n \leqslant \frac{1}{1 - p_t - \left(1 - \frac{1}{q}\right) p_y} + \varepsilon_1.$$

Так как здесь $\varepsilon_1 > 0$ произвольно мало, а в оценках (2) к q_1 добавляется $\varepsilon > 0$, то для примера системы с ограниченными коэффициентами в (2) можно взять $q_1 = \frac{1}{1 - p_t - \left(1 - \frac{1}{q}\right) p_y}$.

2) Рассмотрим уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\, u$, $|a(x)| \leqslant (1 + x)^r$. Если перепишем его в виде системы (1), то получим систему с матрицей $P\left(x, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, причем

$$\left[P_0\left(x, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]^{2n} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (1 + x)^r\right]^n & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial}{\partial t} + (1 + x)^r\right]^n \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы получаются сложением выражений вида $(1+x)^{r(n-k)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, так что имеем $m_k = 0$, $n_k = k$, $\alpha(n_k, m_k) = r(n-k)$. В результате

$$S_{2n} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1 + \frac{r(n-k)}{2n}}{1 - \frac{k}{2n}} = \max\left\{2,\ 1 + \frac{r}{2}\right\}.$$

Легко видеть, что $S_{2n+1} \leqslant \max\left\{2,\ 1+\frac{r}{2}\right\} + \varepsilon_1$ при любом $\varepsilon_1 > 0$, если n достаточно большое. Поэтому оценка (2) для рассматриваемого уравнения (1) имеет вид $|u| + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant C \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\}$, $q_1 = \max\left\{2,\ 1+\frac{r}{2}\right\}$ и совпадает с оценкой, которая может быть получена из работы [8], где вопрос рассматривался для одного уравнения с переменными коэффициентами.

3) Для системы (1) общего вида вопросы подсчета величин S_n и нахождения «наилучшего» $q_1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n + \varepsilon_1$, по-видимому, мало перспективны. Но если интересоваться получением хоть каких-то оценок вида (2), из которых следовала бы тривиальность решения, то такой вопрос всегда решается. Достаточно смажорировать все коэффициенты в матрице $P\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ одной функцией $C(1+x)^a$. Тогда в формуле для S_n будет $\alpha(n_k, m_k) = an$ и оценка величины S_n сведется к оценке величины

$$\max_{(an, n_k, m_k) \in V_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}\left[n_k + \left(1 - \frac{1}{q}\right) m_k\right]},$$

т. е. интересующая нас величина имеет отношение к системе с постоянными коэффициентами. А поэтому вопросы можно решать дальше тем же путем, что и в примере 1).

Доказательство теоремы проведем не для самого общего случая сформулированных условий, а предполагая переменные t и y одномерными.

Введем два множества специальных функций.

Обозначим через $\Phi_{q,b}$ пространство бесконечно дифференцируемых на всей оси y функций $\varphi(y)$, удовлетворяющих условиям $(n = 0, 1, \ldots)$: $|\varphi^{(n)}(y)| \leqslant C^n n^{\left(1-\frac{1}{q}\right)n} \exp\{-b|y|^q\}$ $(C = C(\varphi))$. Известно [10], что при $q > 1$ и произвольном $b > 0$ такие $\varphi(y)$ существуют и их достаточно много.

Обозначим через Ω_δ пространство бесконечно дифференцируемых и финитных вне отрезка $[0, 1]$ функций $\omega(t)$, для которых $|\omega^{(n)}(t)| \leqslant C^n n^{(1+\delta)n}$ $(C = C(\omega),\ n = 0, 1, \ldots)$. Известно [11], что при $\delta > 0$ такие $\omega(t)$ существуют и их достаточно много.

Пусть $u_i(x, t, y)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условиям теоремы и, тем самым, зафиксированы подходящие q, q_1, ε. Возьмем пространство $\Phi_{q,b}$ с достаточно большим $b > 0$ и пространство Ω_δ с некоторым $\delta > 0$. Тогда при $\varphi(y) \in \Phi_{q,b}$, $\omega(t) \in \Omega_\delta$ выражения $(u_j, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}) \equiv \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_j(x, t, y)\, \omega^{(n)}(t)\, \varphi^{(m)}(y)\, dt dy$ определятся корректно для $j = 1, \ldots, N$, $m, n = 0, 1, \ldots$.

Обозначим $H_{n,m}(x) = ((u_1, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}), \ldots, (u_N, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}))$. Если бы последовательность вектор-функций $H_{n,m}(x)$ определялась не с помощью $\varphi(y) \in$

$\in \Phi_{q,b}$, а с помощью финитных и бесконечно дифференцируемых $\varphi(y)$ то для $H'_{n,m}(x)$ имелась бы формула

$$H'_{n,m}(x) = \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}\right), \ldots, \left(\frac{\partial u_N}{\partial x}, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}\right)\right) = ((u_1, P_{11}^{+}\omega^{(n)}\varphi^{(m)}) +$$

$$+ \ldots + (u_N, P_{1N}^{+}\omega^{(n)}\varphi^{(m)}), \ldots, (u_1, P_{N1}^{+}\omega^{(n)}\varphi^{(m)}) + \ldots + (u_N, P_{NN}^{+}\omega^{(n)}\varphi^{(m)})),$$

где P_{ij}^{+} — выражения, формально сопряженные к $P_{ij} = P_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$

Оказывается, что правая часть последнего равенства дает $H'_{n,m}(x)$, если $H_{n,m}(x)$ определяется все же с помощью $\varphi(y) \in \Phi_{q,b}$. Это устанавливается путем предельного перехода по подходящей последовательности финитных бесконечно дифференцируемых функций, сходящихся к $\varphi(y) \in \Phi_{q,b}$.

Над элементами вида $\lambda(x)(u_j, \omega^{(n)}\varphi^{(m)})$ $(j = 1, \ldots, N;\ n, m = 0, 1, \ldots$ и их линейными комбинациями введем операцию умножения на функции от x и операции сдвига T и Y, полагая

$$T\lambda(x)(u_j, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}) = \lambda(x)(u_j, \omega^{(n+1)}\varphi^{(m)}),$$

$$Y\lambda(x)(u_j, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}) = \lambda(x)(u_j, \omega^{(n)}\varphi^{(m+1)}).$$

Понятно, что все три операции коммутируют между собой, а для $H'_{n,m}(x)$ получается формула

$$H'_{n,m}(x) = (P_{11}^{+}(x, T, Y)(u_1, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}) + \ldots + P_{1N}^{+}(x, T, Y)(u_N, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}), \ldots$$

$$\ldots, P_{N1}^{+}(x, T, Y)(u_1, \omega^{(n)}\varphi^{(m)}) + \ldots + P_{NN}^{+}(x, T, Y)(u_N, \omega^{(n)}\varphi^{(m)})).$$

В результате для $H_{n,m}(x)$ получаем уравнение

$$H'_{n,m}(x) = Q(x, T, Y) H_{n,m}(x) \qquad (4$$

с матрицей $Q(x, T, Y)$, элементы Q_{ij} которой связаны с элементами P_{i} матрицы системы (1) следующим образом: $Q_{ij}(x, T, Y) = P_{ij}^{+}(x, T, Y)$. Напомним, что компоненты вектор-функций $H_{n,m}(x)$ в полученном уравнении подчинены определенным ограничениям, а именно, $|(u_j, \omega^{(n)}\varphi^{(m)})| \leqslant$ $\leqslant C_0 C_1^{n+m} n^{(1+\delta)n} m^{\left(1-\frac{1}{q}\right)m} \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\}$, что запишем в форме

$$|H_{n,m}(x)| \leqslant C_0 C_1^{n+m} n^{(1+\delta)n} m^{\left(1-\frac{1}{q}\right)m} \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\}. \qquad (5$$

Покажем, что из (4) и (5) следует $H_{0,0}(x) = 0$. Заменяя уравнение (4 эквивалентным интегральным, запишем неравенство $|H_{n,m}(x)| \leqslant |H_{n,m}(\xi)| +$ $+ \left|\int_x^{\xi} Q(\tau, T, Y) H_{n,m}(\tau)\, d\tau\right|$, где $|H_{n,m}(x)|$ — вектор-функция, составленная из модулей компонент вектор-функции $H_{n,m}(x)$. Пусть $Q_0(x, T, Y)$ — матрица, мажорирующая матрицу $Q(x, T, Y)$ и $0 < x < \xi$. Тогда $|H_{n,m}(x)| \leqslant$ $\leqslant |H_{n,m}(\xi)| + Q_0(\xi, T, Y)\int_x^{\xi} |H_{n,m}(\tau)|\, d\tau$. Учитывая, что $Q_{ij} = P_{ij}^{+}$, в качестве $Q_0(x, T, Y)$ можно взять $P_0(x, T, Y)$. Многократное использование полученного неравенства для $H(x) \equiv |H_{0,0}(x)|$ приводит к следующему:

$$H(x) \leqslant H(\xi) + \xi P_0(\xi, T, Y) H(\xi) + \ldots + \frac{\xi^{s-1}}{(s-1)!} P_0(\xi, T, Y)^{s-1} H(\xi) + \qquad (6$$

$$+ P_0(\xi, T, Y)^s \int_x^{\xi} dx_1 \int_{x_1}^{\xi} \ldots \int_{x_{s-1}}^{\xi} H(x_s)\, dx_s.$$

Правая часть этого неравенства содержит параметры ξ и s. Покажем, что при достаточно больших ξ и s она меньше наперед заданного числа $2\varepsilon_0$. Для этого воспользуемся оценками (3) и (5) и оценим сначала поведение вектор-функции $P_0^n(\xi, T, Y)\, H(\xi)$ при n и $\xi \to \infty$. Каждая компонента $\{P_0^n H(\xi)\}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) этой вектор-функции оценивается в согласии со сделанными обозначениями и предположениями следующим образом:

$$\{P_0^n H(\xi)\}_\nu \leqslant C_0 C_1^n \max_{(\alpha(n_k, m_k), n_k, m_k) \in V_n} (1+\xi)^{\alpha(n_k, m_k)} T^{n_k} Y^{m_k} H(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 C_1^n \max_{V_n} (1+\xi)^{\alpha(n_k, m_k)} \mid H_{n_k, m_k}(\xi) \mid \leqslant C_0 C_1^n \exp\{-\xi^{q_1+\varepsilon}\} \max_{V_n} (1+$$

$$+\xi)^{\alpha(n_k, m_k)} n_k^{(1+\delta) n_k} m_k^{\left(1-\frac{1}{q}\right) m_k} \leqslant C_0 C_2^n \exp\{-\xi^{q_1+\varepsilon}\}\, n^{\delta n} \max_{V_n} (1+$$

$$+\xi)^{\alpha(n_k, m_k)} n^{n_k + \left(1-\frac{1}{q}\right) m_k}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} P_0^n H(\xi)\right\}_\nu \leqslant C_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_2^n n^{\delta n} \frac{\xi^n}{n!} \exp\{-\xi^{q_1+\varepsilon}\} \times$$

$$\times \max_{V_n} (1+\xi)^{\alpha(n_k, m_k)} n^{n_k + \left(1-\frac{1}{q}\right) m_k} \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \exp\{-\xi^{q_1+\varepsilon}\} \sum_{n=0}^{\infty} C_3^n n^{\delta n} \max_{V_n} \frac{(1+\xi)^{n+\alpha(n_k, m_k)}}{n^{n-n_k-(1-1/q) m_k}}.$$

Эту оценку можно продолжить, воспользовавшись тем, что

$$\max_{V_n} \frac{(1+\xi)^{n+\alpha(n_k, m_k)}}{n^{n-n_k-(1-1/q) m_k}} \leqslant \max_{V_n} \frac{(1+\xi)^{n+\alpha(n_k, m_k)}}{n^{(n+\alpha(n_k, m_k))/q_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{(1+\xi)^n}{n^{n/q_1}},\ \frac{(1+\xi)^{n+rn+h}}{n^{(n+rn+h)/q_1}}\right\}.$$

В результате получаем неравенство

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} P_0^n H(\xi)\right\}_\nu \leqslant C_0 \exp(-\xi^{q_1+\varepsilon}\} \left(R(n_0, \xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_3^n (1+\xi)^n}{n^{n(1/q_1-\delta)}} + \right.$$

$$\left. + (1+\xi)^h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_3^n (1+\xi)^{n+rn}}{n^{n(1+r)/q_1-\delta n}}\right) \tag{7}$$

с некоторым полиномом $R(n_0, \xi)$ по ξ.

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\xi \to \infty$. Действительно, первый ряд справа оценивается следующим образом [12]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_3^n (1+\xi)^n}{n^{n(1/q_1-\delta)}} \leqslant C_4 \exp\{C_5 (1+\xi)^{\frac{1}{1/q_1-\delta}}\} = C_4 \exp\{C_5 (1+\xi)^{q_1+\delta_1}\},$$

где $\delta_1 \to 0$, если $\delta \to 0$, C_4, C_5 — положительные постоянные. Такую же оценку имеет и второй ряд. Заметим, что в (7) величина $\varepsilon > 0$ фиксирована, а $\delta > 0$ можно считать такой, что $\delta_1 < \varepsilon$, в результате чего правая часть (7) стремится к нулю при $\xi \to \infty$. Итак, при $\xi \to \infty$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} P_0^n H(\xi) \right\}_\nu \to 0 \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

А это значит, что правая часть неравенства (6), за исключением последнего слагаемого, при достаточно большом ξ будет меньше наперед заданного $\varepsilon_0 > 0$, и не зависимо от значения параметра s. Если при таком ξ рассмотреть последнее слагаемое в неравенстве (6), то оно оказывается убывающим к нулю при $s \to \infty$. Это легко проверяется, и, взяв s достаточно большим, из (6) получим, что $H(x) \leqslant 2\varepsilon_0$, откуда $H(x) \equiv |H_{0,0}(x)| \equiv 0$. Этим доказано, что $(u_j, \omega\varphi) = 0$ $(j = 1, \ldots, N;\ \omega \in \Omega_\delta,\ \varphi \in \Phi_{q,b})$. Так как пространства Ω_δ и $\Phi_{q,b}$ достаточно богаты функциями, получаем $u_j \equiv 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйдельман С. Д. Теоремы типа Лиувилля для параболических и эллиптических систем.— ДАН СССР, 1954, **99**, № 5, с. 681—684.
2. Ландис Е. М. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений.— ДАН СССР, 1956, **107**, № 5, с. 640—643.
3. Аршон И. С., Пак М. А. Теоремы единственности для гармонических функций в полупространстве.— Мат. сб., 1965, **68**, № 1, с. 148—151.
4. Дехтярюк С. С. Асимптотичні теореми єдиності розв'язку системи диференціальних рівнянь у півпросторі.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 12, с. 1069—1073.
5. Ландис Е. М. Об одной теореме типа Фрагмена—Линделефа для решений эллиптических уравнений.— Успехи мат. наук, 1975, **30**, вып. 5, с. 213.
6. Ландис Е. М. и Олейник О. А. Обобщенная аналитичность и связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений.— Успехи мат. наук, 1974, **29**, вып. 2, с. 190—206.
7. Гусаров А. Л. О точной лиувиллевой теореме для решений параболического уравнения на характеристике.— Мат. сб., 1975, **97**, № 3, с. 379—394.
8. Чаус Н. Н. О несуществовании быстро убывающих решений в полуполосе.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 2, с. 213—221.
9. Чаус Н. Н. Вариант теоремы Фрагмена—Линделефа для решений системы дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1977, **13**, № 10, с. 1897—1899.
10. Гельфанд Н. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2.— М.: Физматгиз, 1958.— 362 с.
11. Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций.— Л.— М.: ОНТИ, 1937.— 107 с.
12. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию
7.VII 1978 г.