УДК 517.53

А. И. Щехорский

Некоторые дифференциальные свойства голоморфных отображений

Пусть E — произвольное множество в $\mathbf{C}^n$, z — предельная точка множества E, $z \in E$, f — отображение E в $\mathbf{C}^m$.

Предположим, что существует линейное преобразование A пространства $\mathbf{C}^n$ в пространство $\mathbf{C}^m$, такое, что

$$\lim_{\substack{\zeta \to z \\ (\zeta \in E)}} \frac{\| f(\zeta) - f(z) - A(\zeta - z) \|_m}{\| \zeta - z \|_n} = 0.$$

Норма, фигурирующая в числителе дроби,— это норма пространства $\mathbf{C}^m$, а в знаменателе — норма вектора $\zeta - z$ в $\mathbf{C}^n$.

Преобразование A называют полной производной отображения f в точке z по множеству E и пишут $f'_E(z) = A$.

Если отображение f имеет в каждой точке z множества производную $f'_E(z)$, то тем самым отображение f индуцирует отображение f' на E со значениями в множестве $L(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^m)$ — линейных отображений пространства $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$.

Пространство $L(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^m)$ — нормированное пространство с нормой $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |^2$, где $\{a_{ij}\}$ — матрица линейного отображения A.

Пусть G — некоторое ограниченное открытое множество в $\mathbf{C}^n$. Через $H(G, \mathbf{C}^m)$ обозначим множество голоморфных отображений множества G в пространство $\mathbf{C}^m$, а множество непрерывных отображений множества G в пространство $\mathbf{C}^m$ обозначим через $\mathbf{C}(\overline{G}, \mathbf{C}^m)$.

Для всякого $f \in \mathbf{C}(\overline{G}, \mathbf{C}^m)$, для каждого множества $E \subset \overline{G}$ определим модули непрерывности формулой (обозначения и терминологию см. в [1—3]).

$$\omega_{E,f}(\delta) = \sup_{\substack{z^1, z^2 \in E \\ \|z^1 - z^2\|_n \leqslant \delta}} \| f(z^1) - f(z^2) \|_m.$$

Рассмотрим условия на множество G, обеспечивающие истинность следующих предложений:

1) Если в точке $z^0 \in \partial G$ существует производная $f'_{\partial G}(z^0)$, то в этой точке существует и производная $f'_{\overline{G}}(z)$.

2) Если производная $f'_{\partial G}(z)$ непрерывна на ∂G и $\omega_{\partial G, f}(\delta) \leqslant \text{const}\, \delta$, то производная $f'_{\overline{G}}(z)$ непрерывна на $\overline{G}$.

Предложения 1), 2) доказаны в работах [1—2] для весьма широких классов открытых множеств в $\mathbf{C}$.

Опираясь на результаты работ [1—2], устанавливаем излагаемые ниже аналогичные результаты для некоторых классов открытых множеств $G \subset \mathbf{C}^n$.

1. В теоремах 1—3 предполагаем, что G — открытое множество в $\mathbf{C}^n$, $f \in H(G, \mathbf{C}^m)$, $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта, z^0 — произвольная фиксированная точка множества $\mathbf{C}^n \setminus G$, s — фиксированное число, $s \geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть G область в $\mathbf{C}^n$, строго псевдовыпуклая в точке $z^0 \notin G$.*

а) *Если*

$$\varlimsup_{\substack{\zeta\to z\\(\zeta\in G)}} \| f(\zeta)\|_m \leqslant \mu(\max\{s, \| z - z^0\|_n\}) \qquad (\forall z\in(\partial G)\setminus\{z^0\}),$$

то

$$\| f(\zeta)\|_m \leqslant c\mu(\max\{s, \| \zeta - z^0\|_n\}) \qquad (\forall \zeta\in G), \tag{2}$$

где c не зависит от ζ и s.

б) *Если* $\|f(\zeta)\|_m \leqslant 1$, $\alpha(\delta)$ — *неубывающая мажоранта и*

$$\varlimsup_{\substack{\zeta\to z\\(\zeta\in G)}} \| f(\zeta)\|_m \leqslant \mu(\max\{s, \| z - z^0\|_n\})\,\alpha(\max\{s, \| z - z^0\|_n\}) \quad (\forall z\in\partial G\setminus\{z^0\}), \tag{3}$$

то

$$\| f(\zeta)\|_m \leqslant c'\mu(\max\{s, \| \zeta - z^0\|_n\})\,A_{\alpha,\mu}(\max\{s, \| \zeta - z^0\|_n\}) \quad (\forall \zeta\in G), \tag{4}$$

где c' не зависит от ζ и s, а функция $A_{\alpha,\mu}(\delta)$ введена в [1—2].

Следствие. *Если в условиях теоремы 1 $z^0\in\partial G$ и*

$$\varlimsup_{\substack{\zeta\to z\\(\zeta\in G)}} \| f(\zeta)\|_m = o(\mu(\| z - z^0\|_n)) \quad (z\to z^0,\ z\in(\partial G)\setminus\{z^0\}), \tag{5}$$

то

$$\| f(\zeta)\|_m = o(\mu(\| \zeta - z^0\|_n)) \quad (\zeta\to z^0). \tag{6}$$

Для множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n \subset \mathbf{C}$ через $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ обозначим декартово произведение этих множеств. Пусть $G = G_1\times G_2\times\ldots\times G_j\times \times\ldots\times G_n$ — открытое множество в $\mathbf{C}^n$, $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_j^0, \ldots, z_n^0)\in\mathbf{C}^n$, $z_j^0 \notin G_j$. Через $\mathbf{C}_j^*(z^0)$ обозначим нижнюю плотность емкости множества $\Delta G_j = \mathbf{C}\setminus G_j$ в точке z_j^0 (см. [1, с. 136]).

Теорема 2. *Если при некотором j имеет место неравенство $C_j^*(z^0) > 0$, то:*

а) *из условия* (1) *следует оценка* (2);

б) *из условия* (3) *следует оценка* (4).

Следствие. *Если в условиях теоремы* 3 $z^0\in\partial G$, *то из условия* (5) *следует равенство* (6).

Теоремы 1—3 нетрудно доказать с помощью теорем 1—3 из [3].

2. Опираясь на теоремы 1—3, исследуем вопрос о существовании телесной производной голоморфного отображения в граничной точке открытого множества, а также вопрос о непрерывном ее продолжении на границу этого множества.

В теоремах 4—6 предполагаем, что G открытое множество в $\mathbf{C}^n$, $f\in H(G, \mathbf{C}^m)$, f — ограниченное отображение G, $z^0\in\partial G$, A — фиксированное линейное отображение $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$.

Справедливы следующие многомерные аналоги теоремы 6.3 из [1].

Теорема 4. *Пусть G область в $\mathbf{C}^n$, строго псевдовыпуклая в точке z^0. Тогда, если*

$$\varlimsup_{z\to z}\ \varlimsup_{\substack{\zeta\to z\in(\partial G)\setminus\{z^0\}\\(\zeta\in G)}} \frac{\| f(\zeta) - A(\zeta - z^0)\|_m}{\| \zeta - z^0\|_n} = 0, \tag{7}$$

то в точке z^0 существует предел

$$\lim_{\substack{\zeta\to z^0\\(\zeta\in G)}} \frac{\| f(\zeta) - A(\zeta - z^0)\|_m}{\| \zeta - z^0\|_n}, \tag{8}$$

равный нулю.

Доказательство. Положим

$$\sup_{z:\|z-z^0\|_n \leqslant \delta} \ \overline{\lim_{\substack{\zeta \to z \in (\partial G) \setminus \{z^0\} \\ (\zeta \in G)}}} \frac{\| f(\zeta) - A(\zeta - z^0) \|_m}{\| \zeta - z^0 \|_n} = \alpha(\delta). \tag{9}$$

Тогда из (7) следует, что

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0. \tag{10}$$

Можно считать, что область G ограничена. Поэтому из (7) и (10) при достаточно большом $N > 0$ вытекает

$$\overline{\lim_{\substack{\zeta \to z \in (\partial G) \setminus \{z^0\} \\ (\zeta \in G)}}} \| f(\zeta) - A(\zeta - z^0) \|_m \leqslant N \| z - z^0 \|_n \, \alpha(\| z - z^0 \|_n). \tag{11}$$

Применяя теорему 1 к функциям $f(\zeta) - A(\zeta - z^0)$, $\alpha(\delta)$, $\mu(\delta) = N\delta$, получаем соотношение

$$\| f(\zeta) - A(\zeta - z^0) \|_m \leqslant c \| \zeta - z^0 \|_n \, A_{\alpha,\mu}(\| \zeta - z^0 \|_n) \quad (\forall \zeta \in G), \tag{12}$$

откуда следует [1, с. 134], что предел (8) существует и равен нулю.

Теорема 5. *Если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times C_j \times \ldots \times G_n$ — открытое множество, и при некотором j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ $C_j^*(z^0) > 0$, то из справедливости равенства* (7) *в точке z^0 существует предел* (8), *равный нулю.*

Теорема 6. *Предположим, что граничная точка z^0 множества G достижима извне G усеченным круговым конусом максимальной размерности. Тогда из равенства* (7) *следует, что в точке z^0 существует предел* (8), *равный нулю.*

Теоремы 5 и 6 можно доказать, опираясь на теоремы 2 и 3, аналогично тому, как доказывалась теорема 4.

В теоремах 7—9 предполагается, что G — открытое множество в $\mathbf{C}^n$, $f \in H(G, \mathbf{C}^m) \cap \mathbf{C}(\overline{G}, \mathbf{C}^m)$, $z^0 \in dG$.

Теорема 7. *Пусть G — область в $\mathbf{C}^n$, строго псевдовыпуклая в точке z^0. Тогда, если в точке z^0 существует контурная производная $f'_{\partial G}(z^0)$, то в ней существует и телесная производная $f'_{\overline{G}}(z^0)$.*

Теорема 8. *Предположим, что $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_j \times \ldots \times G_n$ и при некотором j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ $C_j^*(z^0) > 0$. При этом, если в точке z^0 существует контурная производная $f'_{\partial G}(z^0)$, то в ней существует и телесная производная $f'_{\overline{G}}(z^0)$.*

Теорема 9. *Пусть точка z^0 достижима извне G усеченным круговым конусом максимальной размерности. Тогда, если в точке z^0 существует контурная производная $f'_{\partial G}(z^0)$, то в ней существует и телесная производная $f'_{\overline{G}}(z^0)$.*

Пусть E произвольное множество в $\mathbf{C}^n$, $f(\zeta)$ — отображение множества E в $\mathbf{C}^m$, $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ — стандартный базис пространства $\mathbf{C}^n$, z — фиксированная точка множества E. Предположим, что при некотором j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ z — предельная точка множества $E_{z,j} = \{z : z + \lambda e^j, \lambda \in \mathbf{C}\} \cap E$.

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_m$ компоненты отображения f. Определим на множестве E функции $\partial_E f_i(z)/\partial z_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ равенствами

$$\partial_E f_i(z)/\partial z_j = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (\lambda \in \mathbf{C}: z + \lambda e^j \in E)}} [f_i(z + \lambda e^j) - f_i(z)]/\lambda, \tag{13}$$

если, конечно, этот предел существует.

Если для каждого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ z — предельная точка множества $E_{z,j}$, то f'_E — матрица Якоби, элементы которой — функции $\partial_E f_i(z)/\partial z_j$ $(1 \leqslant \leqslant i \leqslant m)$.

В теореме 10 предполагаем, что G — открытое ограниченное множество в $\mathbf{C}^n$, $f \in H(G, \mathbf{C}^m) \cap \mathbf{C}(\overline{G}, \mathbf{C}^m)$, f_i — компоненты отображения f $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $z \in \partial G$ и при некотором j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. z — предельная точка множества $G_{z,j}$.

Теорема 10. *Пусть $\Delta G_{z,j}$ имеет положительную нижнюю плотность емкости* [1, с. 136]. *Если сужение f на ∂G удовлетворяет условию $\omega_{\partial G, f}(\delta) \leqslant Q\delta$ $(\delta > 0)$ и существует непрерывная на ∂G контурная производная $\partial_{\partial G_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j$, то существует непрерывная на $\overline{G}$ телесная производная $\partial_{\overline{G}_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j$.*

Сформулированная теорема 10 является следствием результатов работы [1].

В последующих теоремах предполагается, что G — открытое ограниченное множество в $\mathbf{C}^n$, $f \in H(G, \mathbf{C}^m) \cap \mathbf{C}(\overline{G}, \mathbf{C}^m)$.

Теорема 11. *Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_i \times \ldots \times G_n$ и каждое множество ΔG_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет положительную плотность емкости. Если сужение f на ∂G удовлетворяет условию $\omega_{\partial G, f}(\delta) \leqslant Q\delta$ $(\delta > 0)$ и существует непрерывная на ∂G производная $f'_{\partial G}$, то существует непрерывная на $\overline{G}$ производная $f'_{\overline{G}}$.*

Доказательство. $f'_{\partial G}$ — матрица Якоби $\{\partial_{\partial G_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j\}$. По теореме 5 $f'_{\overline{G}}$ — существует и является матрицей Якоби $\{\partial_{\overline{G}_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j\}$ $(1 \leqslant \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. Очевидно непрерывность $f'_{\partial G}$ $(f'_{\overline{G}})$ на ∂G $(\overline{G})$ равносильна непрерывности всех функций $\partial_{\partial G_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j$ $(\partial_{\overline{G}_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j)$ на ∂G $(\overline{G})$. По теореме 10 функции $\partial_{\overline{G}_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j$ непрерывны на $\overline{G}$. Теорема 11 доказана.

Теорема 12. *Пусть G — строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$. Если сужение f на ∂G удовлетворяет условию $\omega_{\partial G, f}(\delta) \leqslant Q\delta$ $(\delta > 0)$ и существует непрерывная на ∂G производная $f'_{\partial G}$, то существует непрерывная на $\overline{G}$ производная $f'_{\overline{G}}$.*

Доказательство. Пусть z произвольная фиксированная точка множества ∂G. Можно считать, что при каждом j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ z — предельная точка множества $G_{z,j}$ (указанного требования для точки $z \in \partial G$ можно добиться унитарным преобразованием пространства $\mathbf{C}^n$). Следовательно, $f'_{\overline{G}}$ $(f'_{\partial G})$ — матрица Якоби $\{\partial_{\overline{G}_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j\}$ $\{\partial_{\partial G_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j\}$. По теореме 10 элементы матрицы $\{\partial_{\overline{G}_{z,j}} f_i(z)/\partial z_j\}$ — непрерывные функции в точке z. Теорема 12 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамразов П. М. Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного.— Успехи мат. наук, 1973, 28, вып. 1, с. 131—161.
2. Тамразов П. М. Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев: Наукова думка, 1975.— 272 с.
3. Шехорский А. И. Контурно-телесные теоремы голоморфных функций в C^n. «Конечно-разностные гладкости в задачах теории функций».— Препринт ИМ-77-10, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1977.— 27 с.

Житомирский филиал
Киевского политехнического института

Поступила в редакцию
2.I 1979 г.