УДК 519.21

Ил. И. Гихман

О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа

В данной работе рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения смешанной задачи параболического типа, содержащей функции типа «белого шума».

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)\,u = f(x, t, u) \qquad (1)$$

в области $(t, x) \in [0, \infty) \times B$, $B \in R_m$ при однородном краевом условии

$$u/\partial B = 0 \tag{2}$$

и неоднородном начальном условии

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in B. \tag{3}$$

Область B предполагаем конечной, граница ∂B области B кусочно гладкая. Обозначим через B_+ часть цилиндрической поверхности с основанием ∂B и образующей, параллельной оси t, на которой $t \geqslant 0$. Для простоты будем считать, что коэффициенты положительно определенного оператора

$$\mathfrak{L} = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{j,k}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + C(x) \tag{4}$$

не случайны. Предположим, что функция $f(x, t, u)$, входящая в правую часть уравнения (1), имеет вид

$$f(x, t, u) = a(x, t) + \alpha(t) u(x, t) + [b(x, t) + \beta(t) u(x, t)] \dot{w}(t), \tag{5}$$

где $\{w(t), f_t, t \geqslant 0\}$ — стандартный винеровский процесс; $\alpha(t)$ и $\beta(t)$— случайные f_t-измеримые функции; $a(x, t)$, $b(x, t)$ — неслучайные по x и при любом фиксированном $x \in B$ измеримы относительно потока σ-алгебр f_t. Будем считать функцию $\varphi(x)$ случайной, не зависящей от потока σ-алгебр $\{f_t, t \geqslant 0\}$.

Известно [1], что энергетическое пространство $H_{\mathfrak{L}}$ положительно определенного оператора $\mathfrak{L}$ с нормой $\|u\|^2_{H_{\mathfrak{L}}} = [u, u] = (\mathfrak{L}u, u)$ принадлежит $L_2(B)$ гильбертовому пространству функций, суммируемых с квадратом. Функцию $f(x, t, u)$, определенную выражением (5), можно трактовать как обобщенный случайный процесс со значениями в $L_2(B)$. Допустим, что решение задачи (1) существует и $P\left\{\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt < \infty\right\} = 1$. Тогда его можно разложить в ряд по любой полной в $L_2(B)$ системе, например по системе собственных функций оператора $\mathfrak{L}$. Обозначим эти функции $u_n = u_n(x)$, а соответствующие им собственные числа — через λ_n, $\lambda_n > 0$.

Задача (1)—(3) сведена теперь к интегрированию стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} + \mathfrak{L}u = a(t) + \alpha(t) u(t) + [b(t) + \beta(t) u(t)] \dot{w}(t) \tag{6}$$

с начальным условием $u(0) = \varphi$. Умножим в смысле скалярного произведения $L_2(B)$ левую и правую части уравнения (6) на произвольную неслучайную функцию $\eta(t) \in C([0, \infty), H_{\mathfrak{L}}) \cap C^1([0, \infty), L_2(B))$ и проинтегрируем по t. Тогда

$$\int_0^t \left(\frac{du}{ds}, \eta(s)\right) ds + \int_0^t [u(s), \eta(s)]\, ds = \int_0^t (a(s) + \alpha(s) u(s), \eta(s))\, ds +$$
$$+ \int_0^t (b(s) + \beta(s) u(s), \eta(s))\, dw(s).$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\int_0^t \left(\frac{du}{ds}, \eta(s)\right) ds = (u(t), \eta(t)) - (u(0), \eta(0)) - \int_0^t (u(s), \eta'(s))\, ds.$$

Обозначим через $\tilde{L}_2(B)$, $(\tilde{H}_{\mathfrak{L}})$ пространство случайных функций аргумента x, суммируемых с квадратом с вероятностью 1 в норме $L_2(B)$, $(H_{\mathfrak{L}})$ и таких, что ряд Фурье их по любой полной ортонормированной системе сходится с вероятностью 1. Функцию $u(t)$, принадлежащую с вероятностью 1 классу $C([0, \infty), \tilde{H}_{\mathfrak{L}})$, назовем обобщенным решением задачи (1) — (3), если она удовлетворяет уравнению

$$(u(t), \eta(t)) - (\varphi, \eta(0)) - \int_0^t \left\{\left(u(s), \frac{d\eta}{ds}\right) - [u(s), \eta(s)]\right\} ds =$$
$$= \int_0^t (a(s) + \alpha(s) u(s), \eta(s))\, ds + \int_0^t (b(s) + \beta(s) u(s), \eta(s))\, dw(s). \tag{7}$$

Обозначим $(u(t), u_n) = \xi_n(t)$, $(b(t), u_n) = b_n(t)$, $(a(t), u_n) = a_n(t)$. Тогда из (6) следует, что случайный процесс $\xi_n(t)$ удовлетворяет обыкновенному стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_n(t) = [a_n(t) + (\alpha(t) - \lambda_n)\xi_n(t)]\, dt + [b_n(t) + \beta_n(t)\xi_n(t)]\, dw(t), \quad \xi_n(0) = \xi_0^n, \tag{8}$$

где $\xi_n^0 = (\varphi, u_n)$. Решение уравнения (8) имеет вид [2]

$$\xi_n(t) = \exp(-A_n(t, 0)) \left[\xi_n^0 + \int_0^t [a_n(s) - \beta(s) b_n(s)] \exp A_n(s, 0)\, ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^t b_n(s) \exp A_n(s, 0)\, dw(s)\right].$$

Здесь обозначим $A_n(t, s) = \int_s^t \left[\lambda_n + \frac{1}{2}\beta^2(v) - \alpha(v)\right] dv - \int_s^t \beta(v)\, dw(v)$.

Отсюда следует, что формальное решение задачи (1) — (3) дается рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \left[(\varphi, u_n) \exp - A_n(t, 0) + \int_0^t \exp - A_n(t, s)(a(s) - \beta(s) b(s),\right.$$
$$\left. u_n)\, ds + \exp - A_n(t, 0) \int_0^t \exp A_n(s, 0)(b(s), u_n)\, dw(s). \right. \tag{9}$$

Заметим, что из существования решения задачи (1)—(3) методом Фурье будет следовать его единственность.

Докажем, что ряд (9) — решение задачи (1)—(3).

Теорема. *Пусть случайная функция $\varphi(x)$, не зависит от потока σ-алгебр $\{f_t, t \geqslant 0\}$, такова, что* $\int_B M|\varphi(x)|^2 dx < \infty$, *а оператор $\mathfrak{L}$, задаваемый соотношением* (4), *положительно определен и существует такая константа N, что выполнены условия*

$$|\alpha(t)| + |\beta(t)| \leqslant N, \quad t \in [0, T], \quad \mathrm{mod}\, P, \ \int_B \int_0^T M[a^2(x, t) + b^2(x, t)]\, dxdt < \infty$$

и для любой полной в $L_2(B)$ системы функций $\psi_n(x) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T [M(b(t), \psi_n)^4]^{\frac{1}{2}} dt < \infty$. *Тогда существует единственное обобщенное в смысле равенства* (7) *решение смешанной задачи* (1) — (3).

З а м е ч а н и е 1. В качестве оператора $\mathfrak{L}$ можно взять произвольный положительно определенный оператор с дискретным спектром. При этом метод построения решения остается без всяких изменений. В частности, таким образом могут быть построены решения, соответствующие стохастическому уравнению (1) с однородными краевыми условиями

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos nx_j\,|_{\partial B_+}=0,\quad \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos nx_j+\sigma(x,t)\,u\,|_{\partial B+}=0$$

с начальным условием (3).

З а м е ч а н и е 2. При формулировке теоремы предполагалось, что коэффициенты не случайны. От этого предположения можно избавиться, предположив, что функции, входящие в условия задачи (1)—(3), случайны и измеримы относительно σ-алгебры f° при любом $t \geqslant 0$, а приращения винеровского процесса $w(t+s)-w(t)$, $s>0$, не зависят от потока σ-алгебр $\tilde{f}_t = f_t \cup f^\circ$.

Для доказательства теоремы докажем следующие утверждения.

Л е м м а 1. *Ряд* (9) *сходится равномерно по* $t \in [0, T]$ *в пространстве* $\tilde{L}_2(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $u(x, t)$ представляется ортогональным в $L^2(B)$ рядом, поэтому для равномерной сходимости в $\tilde{L}^2(B)$ достаточно проверить, что ряд из коэффициентов сходится равномерно по t:

$$M\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|^2\leqslant 3\sum_n\Big\{(\varphi,u_n)^2\sup_t\exp-2A_n(t,0)+$$
$$+\sup_t\left[\int_0^t\exp-A_n(t,s)\,(a(s)-\beta(s)\,b(s),u_n)\,ds\right]^2+$$
$$+\sup_t\exp-2A_n(t,0)\left[\int_0^t(b(s),u_n)\exp A_n(s,0)\,dw(s)\right]^2.$$

Обозначим $\rho(t,s)=\exp\left(\int_s^t\beta(v)\,dw(v)-\frac{1}{2}\int_s^t\beta^2(v)\,dv\right)$. Тогда

$$M\sup_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}\exp-2A_n(t,s)\leqslant K_1M\sup\rho(t,s)\leqslant K_1(2+8(\exp K_2T-1))=R,$$

где $K_1=\exp 2\int_0^T|\alpha(t)|\,dt$, $K_2=\sup_t\beta^2(t)$. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}M(\varphi,u_n)^2\sup_t\exp-2A_n(t,0)\leqslant RK_1M\|\varphi\|^2.$$

Оценим вторую сумму в правой части неравенства (10). Нетрудно получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}M\sup_t\left[\int_0^t\exp-A_n(t,s)\,(a(s)-\beta(s)\,b(s),u_n)\,ds\right]^2\leqslant T\sum_{n=1}^{\infty}M\int_0^T\sup_t\exp-$$
$$-2A_n(t,s)\,(a(s)-\beta(s)\,b(s),u_n)^2\,ds\leqslant K_1RT\int_0^T M\|a(s)-\beta(s)\,b(s)\|^2\,ds.$$

Оценим сумму со стохастическими интегралами в неравенстве (10).

Используя формулу Ито, заметим, что

$$M \sup_{t\in[0,T]} \left[\exp - A_n(t,0) \int_0^t b_n(s) \exp A_n(s,0)\, dw(s) \right]^2 \leqslant K_1 M \sup_t \Bigl[\rho(t,0) \times$$

$$\times \int_0^t b_n(s) \exp A_n(s,0)\, dw(s) \Bigr]^2 \leqslant 12 K_1 \int_0^T M b_n^2(t) \exp 2A_n(t,0) \times$$

$$\times \left(\int_0^t \beta(s)\, dw \right)^2 dt + 12 K_1 \int_0^T M\beta^2(t) \left(\int_0^t b_n(s) \exp A_n(s,0)\, dw(s) \right)^2 dt +$$

$$+ 3K_1 T \int_0^T M b_n^2(t) \beta^2(t) \exp 2A_n(t,0)\, dt.$$

Из полученных неравенств нетрудно получить оценку третьей суммы в правой части неравенства (10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \sup_t \left[\exp - A_n(t,0) \int_0^t (b(s), u_n) \exp A_n(s,0)\, dw(s) \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant R_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T [M b_n^4(s)]^{\frac{1}{2}}\, ds.$$

Отсюда получаем утверждение леммы

$$M \sup_t \| u(t) \|^2 \leqslant 3K_1 R M \| \varphi \|^2 + 3K_1 R T \int_0^T M \| a(s) - \beta(s) b(s) \|^2 ds +$$

$$+ 3R_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T [M (b(s), u_n)^4]^{\frac{1}{2}} ds.$$

Из доказанного следует, что сумма ряда (9) с вероятностью 1 принадлежит классу $C([0, \infty), L_2(B))$.

Л е м м а 2. *Ряд* (9) *сходится в среднем в норме пространства* $H_{\mathfrak{L}}$ *равномерно по* $t \in [t_0, T]$ $t_0 > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве $H_{\mathfrak{L}}$ функции $\lambda_n^{-\frac{1}{2}} u_n$ ортонормированы, поэтому достаточно, чтобы сходился в среднеквадратическом равномерно по t ряд из квадратов коэффициентов в разложении

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \Bigl\{ (\varphi, u_n) \exp - A_n(t,0) + \int_0^t \exp - A_n(t,s) (a(s) - \beta(s) b(s),$$

$$u_n)\, ds + \exp - A_n(t,0) \int_0^t \exp A_n(s,0) (b(s), u_n)\, dw(s) \Bigr\} u_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}}.$$

Имеем

$$M \sup_t \lambda_n \xi_n^2(t) \leqslant 3M \sup_t \lambda_n \Bigl\{ \int_0^t \exp - A_n(t,s) (a(s) - \beta(s) b(s), u_n)\, ds +$$

$$+ (\varphi, u_n)^2 \exp - 2A_n(t,0) + \exp - 2A_n(t,0) \left[\int_0^t b_n(s) \exp A_n(s,0)\, dw(s) \right]^2 \Bigr\}.$$

Заметим, что справедлива оценка $\sqrt{\lambda}\exp - \lambda t \leqslant e^{-1} t_0^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}}$, $\lambda > 0$. Отсюда аналогично лемме 1 получаем неравенства

$$M \sup_t \lambda_n \exp - 2A_n(t, 0)(\varphi, u_n)^2 \leqslant \frac{K_1 R}{e^2 t_0^2 \lambda_n} M(\varphi, u_n)^2,$$

$$M \sup_t \lambda_n \left[\int_0^t \exp - A_n(t, s)(a(s) - \beta(s) b(s), u_n)\, ds\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_1 R T}{e^2 t_0^2 \lambda_n} \int_0^T M(a(s) - \beta(s) b(s), u_n)^2\, ds,$$

$$M \sup_t \lambda_n \left[\exp - A_n(t, 0) \int_0^t b_n(s) \exp A_n(s, 0)\, dw(s)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{K_1 R}{e^2 t_0^2 \lambda_n} + \frac{R}{e^2 t_0^2}\right) R_1 \int_0^T [M b_n^4(s)]^{\frac{1}{2}}\, ds.$$

Используя полученные неравенства, легко заметить, что мажорантный ряд сходится. Из доказанной леммы следует, что почти все траектории $u(t) \in C([t_0\ \infty), H_{\mathfrak{L}})$.

Лемма 3. *Функция* $u(x, t)$, *задаваемая рядом* (10),— *обобщенное решение уравнения* (1)—(3).

Доказательство. Покажем, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет соотношению (7). Пусть $\eta(t)$ — гладкая абстрактная функция со значениями в $H_{\mathfrak{L}}$. Умножим скалярно в $L_2(B)$ обе части равенства $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) u_n$ на функцию $\eta(t)$. Тогда $(u(t), \eta(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)(u_n, \eta(t))$. Отсюда, учитывая соотношения (8), можно записать

$$d(u(t), \eta(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, \eta(t))\, d\xi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)(u_n, \eta'(t))\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) + \alpha(t)\xi_n(t)](u_n, \eta(t)) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n(t)(\eta(t), u_n) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n(t) + \beta(t)\xi_n(t))(u_n, \eta(t))\, dw(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)(u_n, \eta'(t))\, dt.$$

Интегрируя полученное равенство на $[0, T]$, получаем доказательство леммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратического функционала.— М.: Гостехиздат, 1952.— 216 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наук. думка, 1968.— 353 с.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редакцию
11.X 1978 г.