УДК 517.512

К. М. Слепенчук

Сильная суммируемость в степени p ряда, связанного с продифференцированным рядом Фурье методом Абеля

Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом 2π. Этой функции поставим в соответствие ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, предполагая, не нарушая общности, что $a_0 = 0$. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt) = \sum_{k=1}^{\infty} kB_k(t) \tag{1}$$

— продифференцированный ряд. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(t)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t), \tag{2}$$

где $\sigma_k(t)$ — частичные суммы ряда (1). Пусть

$$A(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^k \frac{\sigma_k(t)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^k u_k(t), \ z \geqslant 1,$$

—средние Абеля ряда (2).

Будем говорить, что ряд (2) сильно суммируем в степени $p \geqslant 1$ к S A-методом, или $[A]_p$-суммируем к S, если $A(z, t) \to S$, $z \to \infty$ и $\frac{1}{\nu} \int_1^{\nu} z^p \left| \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} \right|^p dz = o(1)$, $\nu \to \infty$.

В работе [1] дано новое определение сильной суммируемости в степени $p \geqslant 1$ на случай суммирования числовых рядов матричными методами. Исходя из этого определения, в работе [2] установлены для матричных методов условия сильной суммируемости в степени p числовых рядов, а в работе [3] — условия сильной суммируемости в степени p в точке ряда Фурье для матричных методов. Здесь устанавливаются условия сильной суммируемости в степени p ряда, связанного с продифференцированным рядом Фурье методом Абеля.

Положим

$$\Phi(x, t) = f(x + t) - f(x - t), \ \Phi_1(x, t) = \Phi(x, t) \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2},$$

$$\Psi(x, t) = \Phi(x, t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad c(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^k \frac{\sin kt}{k},$$

$$c^*(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^k \frac{\cos kt}{k}.$$

Теорема. *Если при некотором x_0 и $\omega \to 0$*

$$1^\circ. \ F_1(\omega) = \omega \int_{\omega}^{\pi} \frac{|\Phi_1(x_0, t)|^p}{t^{2p}} dt = o(1); \quad 2^\circ. \ F_2(\omega) = \omega \int_{\omega}^{\pi} \frac{|\Psi'(x_0, t)|^p}{t^{2p}} dt = o(1);$$

$$3^\circ. \ F_3(\omega) = \omega \int_{\omega}^{\pi} \frac{|\Phi'(x_0, t)|^p}{t^{2p}} dt = o(1)$$

и ряд (2) при $t = x_0$ сходится к S, то при $t = x_0$ он $[A]_p$-суммируем к S.

Доказательство. Так как

$$B_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) [\sin ku \cos kt - \cos ku \sin kt] \, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin k(u - t) \, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x + t) - f(t - x)] \sin kx dx,$$

то при $t = x_0$

$$\frac{\sigma_k(x_0)}{k} = \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} \nu B_\nu(x_0) = \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \Phi(x_0, t)\sum_{\nu=1}^{k} \nu \sin \nu t dt =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \Phi(x_0, t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t\right\} =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \Phi(x_0, t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(k+1/2)t}{2\sin t/2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\Phi(x_0, t)\sin kt - \Psi(x_0, t)\cos kt)\, dt + \frac{1}{4k\pi}\int_0^\pi \Phi_1(x_0, t)\sin ktdt.$$

А так как

$$\int_0^\pi \Psi(x_0, t)\cos ktdt = -\int_0^\pi \frac{\sin kt}{k}\Psi'(x_0, t)\, dt, \quad \int_0^\pi \Phi(x_0, t)\sin ktdt =$$

$$= -\int_0^\pi \frac{\cos kt}{k}\Phi'(x_0, t)\, dt,$$

то A-преобразование ряда (2) при $t = x_0$ примет вид

$$A(z, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^k\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \Phi_1(x_0, t)\frac{\sin kt}{k}\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi\left(\frac{\sin kt}{k}\Psi'(x_0, t) - \frac{\cos kt}{k}\Phi'(x_0, t)\right) dt\right]\right], \qquad (3)$$

откуда

$$\frac{\partial A(z, x_0)}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^k\int_0^\pi \frac{\sin kt}{k}\Phi_1(x_0, t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^k\int_0^\pi \frac{\sin kt}{k}\Psi'(x_0, t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^k\int_0^\pi \frac{\cos kt}{k}\Phi'(x_0, t)\, dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\sigma_1(z, x_0) + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_2(z, x_0) + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_3(z, x_0), \qquad (4)$$

если оправдаем почленное дифференцирование ряда (3). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда (4), следующую из неравенства

$$\left|\sum_{=n+1}^{n+m}\frac{\partial}{\partial z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^k u_k(x_0)\right| \leqslant | S_{n+m}(x_0) - S(x_0) \ \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{n+m}\right| +$$

$$+\left|S_{n+1}(x_0)-S(x_0)\right|\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{n+1}\right|+\sum_{k=n+1}^{n+m-1}\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k+1}\right|\left|S_k(x_0)-S(x_0)\right|,$$

где $S_k(x_0)$ — частичные суммы ряда (2).

Принимая во внимание, что

$$d\left(\frac{F_1(\omega)}{\omega}\right)=-\frac{|\Phi_1(x_0,\omega)|^p}{\omega^{2p}}\,d\omega,\quad \int\limits_0^\pi t^2 z\,|c(z,t)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{z}\int\limits_0^\pi t^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}|\sin kt|\,dt=O(1),$$

и, применяя неравенства Гёльдера, при $p>1$ имеем

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_1^\nu z^p\left|\frac{\partial\sigma_1(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz\leqslant\frac{1}{4\pi\nu}\int\limits_0^\nu\left[z\int\limits_0^\pi|c(z,t)|\,|\Phi_1(x_0,t)|\,dt\right]^p dz<$$

$$<\frac{1}{\nu}\int\limits_1^\nu\left\{\int\limits_0^\pi(t^2z\,|c(z,t)|)^{1/p}\frac{|\Phi_1(x_0,t)}{t^2}(t^2z\,|c(z,t)|)^{1/q}dt\right\}^p dz=$$

$$=-\frac{O(1)}{\nu}\int\limits_1^\nu\left\{\int\limits_0^\pi t^2z\,|c(z,t)|\,d\left(\frac{F_1(t)}{t}\right)\right\}dz=\frac{O(1)}{\nu}\int\limits_1^\nu\Phi^*(z)\,dz.$$

Если $p=1$, то

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_1^\nu z\left|\frac{\partial\sigma_1(z,x_0)}{\partial z}\right|dz=-\frac{1}{4\pi\nu}\int\limits_1^\nu\left[\int\limits_0^\pi t^2z\,|c(z,t)|\,d\left(\frac{F_1(t)}{t}\right)\right]dz.$$

После интегрирования по частям при $p\geqslant1$ имеем

$$\Phi^*(z)=\int\limits_0^\pi\frac{z}{t}\frac{\partial}{\partial t}(t^2\,|c(z,t)|\,F_1(t)\,dt. \tag{5}$$

Покажем, что ядро преобразования (5) регулярно на классе функций $F_1(t)=o(1)$, $t\to0$ [4]. В самом деле, пусть

$$I=\int\limits_0^\pi\frac{z}{t}\left|\frac{\partial}{\partial t}(t^2\,|c(z,t)|)\,dt=\frac{2}{z}\int\limits_0^\pi\right|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}\sin kt\left|dt+\right.$$

$$+\frac{1}{z}\int\limits_0^\pi t\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}k\cos kt\right|dt=I_1+I_2.$$

Для оценки I_2 заметим [5], что при $0<t\leqslant\pi$ и любом n

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kt\right|\leqslant\frac{1}{\sin t/2},\quad\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right|\leqslant\frac{1}{\sin t/2}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенство $\sin\alpha > \alpha - \alpha^3/4$, $0 < \alpha \leqslant \pi/2$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kt = \frac{O(1)}{t}, \quad \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{O(1)}{t}.$$

Так как $\{k(1-1/z)^{k-1}$ положительна и монотонно убывает по k, $k > z-1$, то, применяя лемму Абеля [5], при любом N имеем $\sum_{k=[z]}^{N}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1} k \times \cos kt = O(1)/t$. Следовательно, $\sum_{k=[z]}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1} k\cos kt = O(1)/t$.

Если принять во внимание, что $\left\{k\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}\right\}$ монотонно возрастает по переменной k, при $k \leqslant z-1$, то, применяя лемму Абеля, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1} k\cos kt\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{[z]-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1} k\cos kt\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=[z]}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1} k\cos kt\right| = \frac{O(1)}{t}\left[1 + 2([z]-1)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{[z]-2} +\right.$$

$$\left. + [z]\left(1-\frac{1}{z}\right)^{[z]}\right].$$

В таком случае $I_2 = O(1)\int\limits_0^{\pi} dt = O(1)$. Кроме того,

$$I_1 \leqslant \frac{2}{z}\int\limits_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}|\sin kt| = O(1).$$

Следовательно, $I = O(1)$, т. е. первое условие регулярности выполнено. Далее,

$$I(z) = \int\limits_{1/y}^{\pi}\frac{z}{t}\left|\frac{\partial}{\partial t}(t^2|c(z,t)|)\right|dt < \frac{2}{z}\int\limits_{1/y}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}\sin kt\right|dt +$$

$$+\frac{1}{z}\int\limits_{1/y}^{\pi} t\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1} k\cos kt\right|dt = S_1(z) + S_2(z), \quad y > 0.$$

Принимая во внимание, что функция $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1} k\cos kt$ сохраняет знак на $\left[\frac{1}{y}, \pi\right]$, имеем

$$S_2(z) = \frac{1}{z}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}\int\limits_{1/y}^{\pi} kt\cos kt\,dt\right| =$$

$$=\frac{1}{z}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{k-1}\left(\frac{\cos k\pi}{k}-\frac{\cos k/y}{k}-\frac{1}{y}\sin\frac{k}{y}\right)\right|.$$

Если применить лемму Абеля, то $S_2(z)=\frac{1}{z}(O(1)+O(1)y+O(1)/y)=$ $=o(1),\ z\to\infty$. Кроме того,

$$S_1(z)=\frac{O(1)}{z}\int\limits_{1/y}^{\pi}\frac{dt}{t}=o(1),\ z\to\infty.$$

В этом случае $I(z)=o(1),\ z\to\infty$, т. е. выполнено второе условие регулярности.

Таким образом, $\Phi^*(z)=o(1),\ z\to\infty$, а следовательно,

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}z^p\left|\frac{\partial\sigma_1(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz=\frac{O(1)}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}\Phi^*(z)\,dz=o(1),\ \nu\to\infty.$$

Так же покажем, что при $\nu\to\infty$

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}z^p\left|\frac{\partial\sigma_2(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz=o(1),\quad \frac{1}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}z^p\left|\frac{\partial\sigma_3(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz=o(1).$$

$[A]_p$-суммируемость ряда (2) следует из неравенства

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}z^p\left|\frac{\partial A(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz\leqslant\left\{\left[\frac{1}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}z^p\left|\frac{\partial\sigma_1(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz\right]^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}z^p\left|\frac{\partial\sigma_2(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz\right]^{1/p}+\left[\frac{1}{\nu}\int\limits_{1}^{\nu}z^p\left|\frac{\partial\sigma_3(z,x_0)}{\partial z}\right|^p dz\right]^{1/p}\right\}^p,$$

которое легко получить из неравенства Минковского (при $p=1$ оно очевидно).

ЛИТЕРАТУРА

1. Srivastava P. On the concept of strong Summability.— Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1960, A—26, N 5, p. 545—552.
2. Слепенчук К. М., Новикова Н. С., Удалая Н. И. Сильная суммируемость рядов матричными методами. I.— Изв. вузов. Математика, 1975, № 11, с. 78—88.
3. Слепенчук К. М. Сильная суммируемость в степени p рядов Фурье матричными методами.— В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск: Изд-во при Днепропетр. ун-те, 1975, с. 136—139.
4. Харди Г. Расходящиеся ряды.— М.: Изд-во иностр. лит., 1951.— 71 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II.— М.: Физматгиз, 1969.— 430 с.

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию 18.IX 1978 г. после переработки — 4.V 1979 г.