УДК 517.925

Б. И. Голец, В. Л. Голец, Р. И. Петришин

Об усреднении в колебательных системах, проходящих через резонансы

Рассмотрим колебательную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, \varphi, \varepsilon), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(x) + \varepsilon F(x, \varphi, \varepsilon), \tag{1}$$

где x и φ — соответственно n- и m-мерные векторы, ε—малый параметр. Предположим, что правые части системы (1) определены и 2π-периодичны по φ в области

$$G_{n+m+1} = \{(x, \varphi, \varepsilon); \quad x \in D, \ \varphi \in R^m, \ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^{(0)} \ll 1\}.$$

Уравнения вида (1) с постоянным вектором частот изучались в [1].

В данной работе для систем с переменными частотами находятся условия, позволяющие обосновать метод усреднения на временном отрезке $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$. Решение этого вопроса осложняется тем, что для (1) характерно явление резонанса частот.

Первые результаты в этом направлении в случае «незастревания» двухчастотной системы (1) с аналитическими правыми частями в окрестности резонанса получены в работе [2]. Для систем с произвольным количеством частот ($m > 2$) аналогичные результаты получены в [3]. Основным условием, которое накладывается на систему (1), является условие

$$\left|\left(k, \frac{d\omega}{dt}\right)\right| \equiv \varepsilon \left|\left(k, \frac{\partial\omega}{dx} X\right)\right| \geqslant \sigma\varepsilon, \quad 0 < \|k\| \leqslant N,$$

в области G_{n+m+1}. В [4] расширен класс функций, которому могут принадлежать правые части (1).

В данной работе в случае «незастревания» решения на резонансе обосновано усреднение по всем быстрым переменным при более слабых предположениях на систему (1), чем в [2—4]. Если же решение может «застревать» в окресности некоторых резонансов, то для систем второго приближения получена оценка погрешности метода усреднения по части быстрых переменных.

1. Рассмотрим систему первого приближения для (1)

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon a(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(x) + \varepsilon b(x, \varphi) \tag{2}$$

и усредненную по быстрым переменным систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon \bar{a}(\bar{x}). \tag{3}$$

где

$$\bar{a}(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} a(\bar{x}, \varphi)\, d\varphi_1 \dots d\varphi_m.$$

Получим оценку $\| x(t) - \bar{x}(t) \|$ для $\forall t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ при условии, что $x(0) = \bar{x}(0)$. Предположим, что решение $x(t)$ системы (1) содержится в области D вместе со своей окрестностью радиуса δ. Для вектора k с целочисленными компонентами, $0 < \|k\| \leqslant N$, и произвольного $\mu < 1$ рассмотрим множества

$$S_k = \{x \in D; \quad (k, \omega(x)) = 0\}, \qquad D_\mu^k = \{x \in D; \quad |(k, \omega(x))| < \mu\},$$

где $(k, \omega) = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \omega_i$, $\| k \| = \sum_{i=1}^{m} | k_i |$. Число N определим позже. Будем предполагать, что резонансы изолированы друг от друга, т. е. если $S_k \neq S_{\bar{k}}$, то $|(\bar{k}, \omega(x))| \geqslant \sigma_1$ для $\forall x \in S_k$.

Потребуем, чтобы правые части систем (2) и (3) удовлетворяли условиям

$$\left| \left(\frac{\partial (k, \omega)}{\partial x}, \bar{a}(x) \right) \right| \geqslant \sigma_2, \tag{4}$$

$$\sum_{\|k\| \geqslant 0} \left| \frac{\partial a_k^{(i)}}{\partial x_j} \right| \leqslant \sigma_3, \tag{5}$$

$$\max_{0 \leqslant \|p\| \leqslant l} \sup_{G_{n+m+1}} \left| \frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_m} a^{(i)}(x, \varphi)}{\partial \varphi_1^{p_1} \ldots \partial \varphi_m^{p_m}} \right| \leqslant \sigma_4, \tag{6}$$

$$\| b \| \leqslant \sigma_5^{(1)}, \ \| \omega \| \leqslant \sigma_5^{(2)}, \quad \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\| \leqslant \sigma_5^{(3)}, \quad \left\| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i dx_j} \right\| \leqslant \sigma_5^{(4)} \tag{7}$$

для $\forall (x, \varphi) \in D \times R^m$; $i, j = \overline{1, n}$, $p_i \geqslant 0$, $l \geqslant m + 2$.

Рассмотрим множество $R = \{k\}$ такое, что если $k_1, k_2 \in R$, то $S_{k_1} = S_{k_2}$. Пусть при $t = t_0 \in [0, \varepsilon^{-1}]$ $x(t_0) = x^0 \in s_k$.

Легко показать, что при сделанных предположениях в окрестности рассматриваемого резонанса существует замена переменных

$$x = x^0 + \mu y + \varepsilon U_N(x^0, \varphi), \tag{8}$$

переводящая (2) в систему вида

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\varepsilon}{\mu} \bar{a}_0(x^0, \varphi) + \frac{\varepsilon}{\mu} [R_N a(x^0, \varphi) - R_N \bar{a}_0(x^0, \varphi)] + \varepsilon A_1, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(x^0) + \mu A_2, \tag{9}$$

где

$$\bar{a}_0(x^0, \varphi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x^0, \varphi + \omega(x^0) t) \, dt \equiv \sum_{(k, \omega(x^0)) = 0} a_k(x^0) e^{i(k, \varphi)},$$

$$R_N a(x^0, \varphi) = \sum_{\|k\| > N} a_k(x^0) e^{i(k, \varphi)}.$$

Из условия (6) следует, что если выбрать $N = \sigma_6 \mu^{-\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, то $\| R_N a \| \leqslant \bar{\sigma}_6 \mu^{\alpha(l-m)}$ [5]. Предположим, что для всех $k \in R$ и $\forall x^0 \in S_k$

$$\left| \left(\frac{\partial (k, \omega(x^0))}{\partial x}, \bar{a}_0(x^0, \varphi) \right) \right| \geqslant \sigma_7. \tag{10}$$

Тогда из системы (9) получим, что для достаточно малых ε и μ

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k, \omega(x^0)}{\partial x}, y \right) \right| \geqslant \frac{\sigma_7}{2} \frac{\varepsilon}{\mu}. \tag{11}$$

Рассмотрим

$$(k, \omega(x)) = (k, \omega(x^0 + \mu y + \varepsilon U_N)) \sim \mu\left(\frac{\partial(k, \omega(x^0))}{\partial x}, y\right).$$

Учитывая (11), легко видим, что за время $\Delta t = |t_1 - t_0| \leqslant \sigma_8 \frac{\mu}{\varepsilon}$ решение $x(t)$ выйдет из окрестности резонанса, т. е. $|(k, \omega(x(t_1)))| > \mu$.

Таким образом, условие (10) гарантирует «незастревание» решения $x(t)$ системы (2) в окрестности резонанса.

Сделаем в системе (2) замену переменных $x = z + \varepsilon V_N(z, \varphi)$, где вектор-функция $V_N(z, \varphi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial V_N}{\partial \varphi}\omega(z) = a_N(z, \varphi) - \bar{a}(z) - \delta_N(z, \varphi).$$

Полагая, что неизвестные функции V_N и δ_N — тригонометрические многочлены по φ степени N, для коэффициентов Фурье получим соотношения $i(k, \omega(z))V_{N,k}(z) = a_{N,k}(z) - \delta_{N,k}(z)$, $0 < \|k\| \leqslant N$. Пусть $\delta_{N,k}(z) = a_{N,k}(z) \times$ $\times h_k(z)$, где $h_k(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем $h_k(z) = 1$ при $|(k, \omega(z))| \leqslant \frac{1}{2}\mu$, $h_k(z) = 0$ при $|(k, \omega(z))| \geqslant \mu$ и $0 \leqslant h_k(z) \leqslant 1$ для всех z. Существование такой функции следует из [6].

Тогда уравнения для переменных (z, φ) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{\partial t} = \varepsilon[\bar{a}(z) + \delta_N(z, \varphi)] + \varepsilon R_N a + \varepsilon^2 \frac{\partial V_N}{\partial z}(\bar{a} + \delta_N) + \frac{\varepsilon^2}{\mu} B_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(z) + \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial z} V_N + \varepsilon B_2. \tag{12}$$

Предположим, что в области $z \in D \setminus \bigcup_k D_\mu^k$

$$\left|\left(\frac{\partial(\omega, k)}{\partial z}, R_N a + \frac{\partial V_N}{\partial z}\bar{a}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\mu} B_1\right)\right| \leqslant \sigma_9 N^{m+1-l} + \frac{\varepsilon N}{\mu^2}\sigma_{10} \leqslant \frac{\sigma_2}{2}, \tag{13}$$

тогда, учитывая (4), получим

$$\left|\frac{d(k, \omega(z))}{dt}\right| \geqslant \varepsilon \frac{\sigma_2}{2}. \tag{14}$$

Для выполнения (13) достаточно положить

$$\frac{\sigma_9}{N^{l-m-1}} \leqslant \frac{\sigma_2}{4}, \quad \frac{\varepsilon N \sigma_{10}}{\mu^2} \leqslant \frac{\sigma_2}{4},$$

откуда $\mu^{2+\alpha} \geqslant 4\frac{\sigma_6\sigma_{10}}{\sigma_2}\varepsilon$. В качестве μ можно выбрать $\mu = \sigma_{11}\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+2}}$, где $\sigma_{11} = \left(4\frac{\sigma_6\sigma_{10}}{\sigma_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}$.

Замечание. Если $a(x, \varphi)$ — многочлен по φ, то можно положить $\mu = \bar{\sigma}_{11}\sqrt{\varepsilon}$, где $\bar{\sigma}_{11} = 2\sqrt{\frac{\sigma_{10}\cdot N}{\sigma_2}}$. Таким образом, имеем

$$\|x - z\| \leqslant \varepsilon\|V_N\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_{12} = \sigma_{12}\cdot(\sigma_{11})^{-2-\alpha}\mu^{1+\alpha}. \tag{15}$$

Согласно предположению об изолированности резонанса решение $x(t)$ за время $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ может не более чем $\sigma_{13}N$ раз попасть в окрестность резонанса. Учитывая эти соображения, можно показать, что для $\forall t \in [0, \varepsilon^{-1}]$

$$\| z(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant (\sigma_{14}\mu + \sigma_{15}\mu^{\alpha(l-m)})\, \sigma_{16}N \leqslant \sigma_{17}\varepsilon^{\frac{l-m-1}{1+2(l-m)}},$$

где $\alpha = \dfrac{1}{l-m}$. Тогда

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant 2 \cdot \sigma_{17}\varepsilon^{\frac{l-m-1}{1+2(l-m)}}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть система* (2) *при* $0 < \| k \| \leqslant N$ *имеет изолированные резонансы и выполняются условия* (4) — (7) *и* (10). *Тогда существует такое* $\bar{\varepsilon}^{(0)} \leqslant \varepsilon^{(0)}$, *что при всех* $\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}^{(0)}$ *и* $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *справедлива оценка* $\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant 2\sigma_{17}\varepsilon^{\frac{l-m-1}{1+2(l-m)}}$, $x(0) = \bar{x}(0)$.

Следствие 1. *Если* $a(x, \varphi)$ — *многочлен по* φ, *то, учитывая замечание* 1, *можно показать, что* $\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \sigma_{18}\sqrt{\varepsilon}$.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\,[1 - 0{,}9\cos(9\varphi_1 - \varphi_2) - 0{,}9\cos(10\varphi_1 - \varphi_2)]; \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = 1 + x. \tag{17}$$

Легко убедиться, что для этой системы не выполняются условия теорем, приведенных в работах [2]—[4], для оценки погрешности метода усреднения.

Система (17) имеет два изолированных резонанса $x = 8$ и $x = 9$. Нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы 1. Поэтому, используя следствие 1, получаем $\| x(t) \| - \bar{x}(t) \leqslant \sigma_{18}\sqrt{\varepsilon}$.

2. Для $0 < \| k \| \leqslant N$ рассмотрим множества $D^k_{\mu\alpha} = \{x \in D;\ |(k, \omega(x))| \leqslant \sigma_{19}\mu^{\alpha},\ 0 \leqslant \alpha < 1\}$, где σ_{19} — некоторая постоянная.

Теорема 2. *Пусть система* (2) *такова, что*:

1) *выполняются условия* (5) — (7);

2) *в областях* $D^k_{\mu\alpha} \times R^m \times [0, \varepsilon^{(0)}]$ *функции* $\dfrac{d^{r_k}(\omega, k)}{dt^{r_k}}$ *удовлетворяют условиям*

$$\left| \frac{d^{r_k}(\omega, k)}{dt^{r_k}} \right| \geqslant \sigma_{20}\varepsilon^{r_k}\mu^{\beta_k}, \tag{18}$$

где $r_k \leqslant r$, $\beta_k \leqslant \beta < 1$, $0 < \| k \| \leqslant N$;

3) *выполняется неравенство* $1 - \beta - \alpha r > 0$;

4) *решение* $x(t)$ *содержится в области* D *вместе со своей* δ-*окрестностью*.

Тогда существует такое $\bar{\varepsilon}^{(0)} \leqslant \varepsilon^{(0)}$, *что при всех* $\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}^{(0)}$ *справедлива оценка*

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \sigma_{21}\varepsilon^{\frac{(1-\beta-\alpha r)(l-m)}{2r(l+1)}}, \quad x(0) = \bar{x}(0).$$

Для доказательства теоремы приведем некоторые дополнительные утверждения.

Лемма 1. *При сделанных предположениях решение* $x(t)$ *системы* (2) *за время* $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *может попасть в резонансную область* $\bigcup_k D^k_{\mu}$ *не более чем* $\sigma_{22}N^{n+1}\mu^{-\alpha}$ *раз.*

Доказательство леммы основано на том, что всех векторов k, норма которых не превышает N, не более чем $\sigma_{23}N^m$ [3], и в каждую из областей D_μ^k решение $x(t)$ может попасть за время $t\in[0, \varepsilon^{1-}]$ при достаточно малых μ не более чем $\dfrac{2N\left\|\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right\|\|a\|}{\sigma_{19}\mu^\alpha}\leqslant\sigma_{24}N\mu^{-\alpha}$ раз.

Нетрудно показать, что справедлива такая лемма.

Лемма 2. *Если выполняется условие* 2) *теоремы* 2, *то при* $\Delta t = |t_2-t_1|\leqslant\sigma_{25}\varepsilon^{-1}\mu^{\frac{1-\beta}{r}}$ *решение* $x(t)$ *выйдет из каждой резонансной области* D_μ^k, *где* $(k,\omega(x(t_1)))=0$, $|(k,\omega(x(t_2)))|=\mu$, $\sigma_{25}=2^r\left(1+\dfrac{1}{\sigma_{20}}\right)$.

Используя приведенные выше леммы и идеи работы [2], можно показать, что для $\forall t\in[0,\varepsilon^{-1}]$

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant\sigma_{26}\left(\varepsilon N^{m+1}\mu^{-\left(2+\alpha-\frac{1-\beta}{r}\right)}+N^{-(l-m)}+\mu^{\frac{1-\beta}{r}-\alpha}N^{m+1}\right). \quad (19)$$

Положим $\varepsilon=\mu_a$, $N=[\mu^{-b}]$. Тогда из (19) получим

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant\sigma_{27}\left(\mu^{a-b(m+1)-2-\alpha+\frac{1-\beta}{r}}+\mu^{(l-m)b}+\mu^{\frac{1-\beta}{r}-\alpha-b(m+1)}\right). \quad (20)$$

Пусть

$$(l-m)\,b=a-b(m+1)-2-\alpha+\frac{1-\beta}{r}=\frac{1-\beta}{r}-\alpha-b(m+1). \quad (21)$$

Из (21) имеем $a=2$, $b=\dfrac{1-\beta-\alpha r}{r(l+1)}$. Тогда $\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant3\sigma_{27}\varepsilon^{\frac{(1-\beta-\alpha r)(l-m)}{2r(l+1)}}$.

3. Рассмотрим систему второго приближения (1) вида

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon a(x)+\varepsilon^2A(x,\varphi),\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(x)+\varepsilon B(x,\varphi). \quad (22)$$

Системы такого вида изучались в [7], где обоснован метод усреднения вдоль порождающего решения системы (22) для резонанса частот в начальный момент времени.

Предположим, что существует $p<m$ независимых векторов $k^{(1)},\ldots$ $\ldots, k^{(p)}$, для которых решение $x(t)$ может «застревать» в окрестности резонансов вида $(k^{(i)},\omega(x))=0$, $i=1,\ldots,p$. Рассмотрим линейное пространство целочисленных векторов T, базисом которого являются резонансные векторы $k^{(1)},\ldots,k^{(p)}$. Обозначим

$$K=\begin{pmatrix} k_1^{(1)} & k_2^{(1)} & \ldots & k_m^{(1)}\\ k_1^{(2)} & k_2^{(2)} & \ldots & k_m^{(2)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ k_1^{(p)} & k_2^{(p)} & \ldots & k_m^{(p)}\end{pmatrix},\qquad K^*=\begin{pmatrix} k_1^{(1)} & \ldots & k_p^{(1)} & k_{p+1}^{(1)} & \ldots & k_m^{(1)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ k_1^{(p)} & \ldots & k_p^{(p)} & k_{p+1}^{(p)} & \ldots & k_m^{(p)}\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

Не умаляя общности, можем считать, что $\det K^*\neq0$. Сделав в (22) замену переменных $K\varphi=\psi$, получим

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon a(x)+\varepsilon^2A_1(x,\varphi',\psi),\qquad \frac{d\psi}{dt}=K\omega(x)+\varepsilon KB_1(x,\psi,\varphi'),$$

$$\frac{d\varphi'}{dt}=\omega'(x)+\varepsilon B_1(x,\psi,\varphi'). \quad (23)$$

Рассмотрим систему, усредненную по части быстрых переменных:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon a(\bar{x}) + \varepsilon^2 \bar{A}_1(\bar{x}, \bar{\psi}), \quad \frac{d\bar{\varphi}'}{dt} = \omega'(\bar{x}) + \varepsilon \bar{B}_1'(\bar{x}, \bar{\psi}),$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = K\omega(\bar{x}) + \varepsilon K \bar{B}_1(\bar{x}, \bar{\psi}), \tag{24}$$

где $(\bar{A}_1; \bar{B}_1) = \dfrac{1}{(2\pi)^{m-p}} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} (A_1(\bar{x}, \bar{\psi}, \varphi'); \quad B_1(\bar{x}, \bar{\psi}, \varphi'))\, d\varphi'$.

Теорема 3. *Пусть*

1) *в области* C_{n+m+1}

$$\|a\| \leqslant C^{(1)}, \quad \|A\| \leqslant C^{(1)}, \quad \|B\| \leqslant C^{(1)}, \quad \left\|\frac{d\omega}{dx}\right\| \leqslant C^{(1)},$$

$$\sum_{\|k\| \geqslant 0} \left|\frac{\partial A_k^{(i)}}{\partial x_j}\right| \leqslant C^{(2)}, \quad \sum_{\|k\| \geqslant 0} \left|\frac{\partial B_k^{(s)}}{\partial x_j}\right| \leqslant C^{(2)}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, m};$$

2) *вектор-функция* $a(x)$ *удовлетворяет в области* D *условию Липшица*: $\|a(x) - a(y)\| \leqslant L_a \|x - y\|$;

3) *для всех* $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$, $\|\rho\| \leqslant l$ *в области* G_{n+m+1}

$$\left\|\frac{\partial^{\|\rho\|} A}{\partial\varphi_1^{\rho_1} \dots \partial\varphi_m^{\rho_m}}\right\| \leqslant C^{(3)}, \quad \left\|\frac{\partial^{\|\rho\|} B}{\partial\varphi_1^{\rho_1} \dots \partial\varphi_m^{\rho_m}}\right\| \leqslant C^{(3)}, \quad l > m + 1;$$

4) *в области* $D_{\mu^\alpha}^k \times R^m \times [0, \varepsilon^{(0)}]$ *функция* $\dfrac{d^{r_k}(k, \omega)}{dt^{r_k}}$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{d^{r_k}(k, \omega)}{dt^{r_k}}\right| \geqslant \varepsilon^{r_k} \mu^{\beta_k} \sigma_{28}, \tag{25}$$

где $r_k \leqslant r$, $\beta_k \leqslant \beta < 1$, $k \overline{\in} \mathrm{T}$, $1 - \beta - \alpha r > 0$;

5) *решение* $x(t)$ *содержится в области* D *вместе со своей* δ-*окрестностью.*

Тогда существует $\bar{\varepsilon}^{(0)} \leqslant \varepsilon^{(0)}$ *такое, что для всех* $\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}^{(0)}$ *и* $\forall t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leqslant \sigma_{29} \varepsilon^{1 + \frac{(1-\beta-\alpha r)(l-m)}{2r(l+1)}}, \quad x(0) = \bar{x}(0).$$

Сделав в системе (24) замену переменных $K^* \bar{\theta} = \begin{pmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\varphi}' \end{pmatrix}$, получим

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon a(\bar{x}) + \varepsilon^2 \tilde{A}(\bar{x}, \bar{\theta}), \qquad \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \omega(\bar{x}) + \varepsilon \tilde{B}(\bar{x}, \bar{\theta}), \tag{26}$$

где $(\tilde{A}; \tilde{B}) = \sum\limits_{k \in T} (A_k(\bar{x}); \ B_k(\bar{x}))\, e^{i(k, \bar{\theta})}$.

Пусть $(x(t), \varphi(t))$ — решение системы (1), $x(0) = \bar{x}(0)$, $\varphi(0) = \bar{\theta}(0)$.

Лемма 3. *В области* $\left(D \diagdown \bigcup\limits_{k \overline{\in} T} D_\mu^k\right) \times R^m \times [0, \varepsilon^{(0)}]$ *существуют вектор-функции*

$$y = x + \varepsilon^2 U_N(x, \varphi), \quad \theta = \varphi + \varepsilon V_N(x, \varphi) \tag{27}$$

такие, что

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon a(y)+\varepsilon^2\widetilde{A}(y,\theta)+\varepsilon^2 b_1(t),\qquad \frac{d\theta}{dt}=\omega(y)+\varepsilon\widetilde{B}(y,\theta)+\varepsilon b_2(t),\quad (28)$$

$$\|U_N(y,\theta)\|\leqslant\frac{\sigma_{30}}{\mu};\qquad \|V_N\|\leqslant\frac{\sigma_{31}}{\mu};$$

$$\|\varepsilon^2 b_1(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon^3}{\mu}\sigma_{32}+\sigma_{33}\varepsilon^3\left\|\frac{\partial U_N}{\partial x}\right\|+\sigma_{34}\varepsilon^2\sup_{G_{n+m+1}}\|R_N A\|;$$

$$\|\varepsilon b_2(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon^2}{\mu}\sigma_{35}+\sigma_{36}\left\|\frac{\partial V_N}{\partial x}\right\|+\sigma_{37}\varepsilon\sup_{G_{n+m+1}}\|R_N B\|.$$

В самом деле, если положить

$$(U_N(x,\varphi);\ V_N(x,\varphi))=-\sum_{\substack{\|k\|\leqslant N\\ k\notin T}}\frac{(A_k(x);\ B_k(x))}{i(\omega,k)}e^{i(k,\varphi)}$$

и продифференцировать замену (27), то получим утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть при* $t\in[\tau,\bar\tau]$ *решение* $x(t)$ *содержится в резонансной области* $\bigcup_{k\notin T}D_\mu^k$, *причем* $\|x(\tau)-\bar x(\tau)\|\leqslant\gamma_1$, $\|\varphi(\tau)-\bar\theta(\tau)\|\leqslant\gamma_2$. *Тогда для* $\forall t\in[\tau,\bar\tau]$

$$\|x(t)-\bar x(t)\|\leqslant e^{\varepsilon L_a(\bar\tau-\tau)}[\gamma_1+\sigma_{38}\varepsilon^2(\bar\tau-\tau)],\quad \|\varphi(t)-\bar\theta(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_2+\sigma_{39}\varepsilon(\bar\tau-\tau)+\sigma_{40}\gamma_1(\bar\tau-\tau).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5. *Пусть при* $t\in[\bar\tau,\tau]$ *решение* $x(t)$ *содержится в нерезонансной области* $D\diagdown\bigcup_{k\notin T}D_\mu^k$, *причем* $\|x(\bar\tau)-\bar x(\bar\tau)\|\leqslant\delta_1$, $\|\varphi(\bar\tau)-\bar\theta(\bar\tau)\|\leqslant\delta_2$. *Тогда для* $\forall t\in[\bar\tau,\tau]$ *справедливы неравенства*

$$\|x(t)-\bar x(t)\|\leqslant e^{\varepsilon\gamma(\tau-\bar\tau)}[c_1\varepsilon^2\mu^{\frac{1-\beta}{r}-2}+c_2\varepsilon^2\sup_{G_{n+m+1}}(\|R_NA\|,\ \|R_NB\|)(\tau-\bar\tau)+$$
$$+c_3\delta_1+c_4\varepsilon\delta_2],$$

$$\|\varphi(t)-\bar\theta(t)\|\leqslant e^{\varepsilon\gamma(\tau-\bar\tau)}\Big[\tilde c_1\varepsilon\mu^{\frac{1-\beta}{r}-2}+\tilde c_2\varepsilon\sup_{G_{n+m+1}}(\|R_NA\|,\ \|R_NB\|)(\tau-\bar\tau)+$$
$$+\tilde c_3\frac{\delta_1}{\varepsilon}+\tilde c_4\delta_2\Big].$$

Доказательство. Из уравнений (26) и (27) имеем

$$\left\|\frac{d}{dt}(y-\bar x)\right\|\leqslant(\varepsilon L_a+\varepsilon^2L_{\tilde A}^{(1)})\|y-\bar x\|+\varepsilon^2L_{\tilde A}^{(2)}\|\theta-\theta\|+\varepsilon^2\|b_1(t)\|,$$

$$\left\|\frac{d}{dt}(\theta-\bar\theta)\right\|\leqslant(L_\omega+\varepsilon L_{\tilde B}^{(1)})\|y-\bar x\|+\varepsilon L_{\tilde B}^{(2)}\|\theta-\bar\theta\|+\varepsilon\|b_2(t)\|.$$

Решая эту систему и учитывая, что $\|x-y\|\leqslant\frac{\varepsilon^2}{\mu}\sigma_{30}$, $\|\theta-\varphi\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_{31}$, получаем доказательство леммы 5.

Для доказательства теоремы 3 воспользуемся леммами 4 и 5 для оценки $\| x(t) - \bar{x}(t) \|$ соответственно в резонансной и нерезонансной областях. Учитывая леммы 1 и 2, находим

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant (\sigma_{41}\varepsilon^2\mu^{-2+\frac{1-\beta}{r}} + \sigma_{42}\varepsilon\mu^{\frac{1-\beta}{r}})\,\mu^{-\alpha}N^{m+1} + \sigma_{43}\varepsilon N^{-(l-m)}$$

$$\text{для } \forall t \in [0, \varepsilon^{-1}].$$

Если взять $\mu^2 = \varepsilon$, $N \sim \mu^{-\frac{1-\beta-\alpha r}{r(l+1)}}$, то $\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \sigma_{44}\varepsilon^{1+\frac{(1-\beta-\alpha r)(l-m)}{2r(l+1)}}$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Из процесса доказательства последней теоремы следует, что на временном отрезке $[0, \varepsilon^{-1}]$ справедливо также неравенство

$$\| \varphi(t) - \bar{\theta}(t) \| \leqslant \sigma_{45}\varepsilon^{\frac{(1-\beta-\alpha r)(l-m)}{2r(l+1)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 503 с.
2. Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы.— ДАН СССР, 1965, **161**, № 1, с. 9—12.
3. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.— 442 с.
4. Попова Н. И. Об усреднении по быстрым переменным в многочастотных системах, допускающих резонансы. Препринт, ИТЭФ-70. М., 1977.— 30 с.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1969.— 247 с.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.
7. Гребенников Е. А., Попова Н. И. Обоснование метода усреднения для одной системы дифференциальных уравнений в резонансном случае: Препринт, ИТЭФ-129.— М., 1976.— 31 с.
8. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике.— М.: Наука, 1978.— 127 с.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию 16.IV 1979 г.;
после переработки — 24.I 1980 г.