УДК 517.917

Ю. Д. Шлапак

Периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной

В работах [1 — 3] для уравнений нормального вида $\frac{dx}{dt} = g(t, x)$ построен численно-аналитический метод отыскания периодических решений.

В данной работе этот метод применяется для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{1}$$

Значение такого подхода состоит в том, что решение задачи о приведении уравнения (1) к нормальному виду, во-первых, затруднительно, а во-вторых, как будет показано ниже, излишне при отыскании его периодических решений.

Предположим, что правая часть $f(t, x, y)$ $\left(y = \frac{dx}{dt}\right)$ удовлетворяет условиям:

1) определена и непрерывна по переменным t, x, y в области

$$t \in R, \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d]; \tag{2}$$

2) периодична по t с периодом T;
3) удовлетворяет в области (2) неравенствам:

$$|f(t, x, y)| \leqslant M, \tag{3}$$

$$|f(t', x', y') - f(t, x'', y'')| \leqslant K_1 |x' - x''| + K_2 |y' - y''|, \tag{4}$$

где M, K_1, $K_2 \geqslant 0$.

Уравнение (1) определим как T-систему в области (2) (см. [3]), когда постоянные a, b, c, d, M, K_1, K_2 связаны неравенствами

$$b - a \geqslant MT, \quad c \leqslant -2M < 2M \leqslant d, \tag{5}$$

$$4K_2 + TK_1 < 2. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение линейный оператор L, действующий на непрерывную при $t \in [0, T]$ функцию $f(t)$ по формуле

$$Lf(t) = \int_0^t (f(s) - \overline{f(t)})\, ds, \tag{7}$$

где $\overline{f(t)}$ — интегральное среднее по времени на отрезке $[0, T]$:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(s)\, ds. \tag{8}$$

Очевидно, что если $f(t)$ — периодическая с периодом T функция, то и $Lf(t)$ — также периодическая с периодом T функция.

Известно [3], что

$$|Lf(t)| \leqslant 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)\max_{t\in[0,T]}|f(t)| \overset{\text{det}}{=} \alpha_1(t)\,|f(t)|_0 < \frac{T}{2}M. \tag{9}$$

Обозначим $I_f = \left[a+\frac{MT}{2},\ b-\frac{MT}{2}\right]$. Решение вопроса о периодических решениях уравнения (1) в значительной мере опирается на следующее утверждение.

Основная лемма. *Пусть функция $f(t, x, y)$ определена в области* (2), *непрерывна по t, x, y, периодична по t с периодом T и удовлетворяет неравенствам* (3)—(6). *Тогда последовательность периодических по t периода T функций*

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + Lf\left(t, x_m(t, x_0), \frac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

сходится при $m\to\infty$ равномерно относительно

$$t, x_0 \in R\times I_f \tag{11}$$

к функции $x^0(t, x_0)$, определенной в области (11), *периодической по t с периодом T. Функция $x^0(t, x_0)$ удовлетворяет уравнению*

$$x(t) = x_0 + Lf\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) \tag{12}$$

и допускает оценку

$$r_m(t) \leqslant Q_0^m (E-Q_0)^{-1} z_1^0, \tag{13}$$

где

$$r_m(t) = \begin{pmatrix} |x^0(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \\ \left|\dfrac{dx^0(t, x_0)}{dt} - \dfrac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right| \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \frac{T}{2}K_1, & \frac{T}{2}K_2 \\ 2K_1, & 2K_2 \end{pmatrix}, \quad z_1^0 \leqslant \begin{pmatrix} \frac{MT}{2} \\ 2M \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Доказательство. По индукции покажем, что $x_m(t, x_0)$ и $\frac{dx_m(t, x_0)}{dt}$ для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ принимают при $t\in R$ значения в области (2). Действительно, при $m=0$ из равенства (10) в силу (9) имеем:

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \leqslant Lf(t, x_0, 0) \leqslant \frac{MT}{2},$$

так что $a \leqslant x_1(t, x_0) \leqslant b$ для всех $t\in R$ лишь только $x_0 \in I_f$. Более того, дифференцируя $x_1(t, x_0)$, получаем, что

$$\frac{dx_1(t, x_0)}{dt} = f(t, x_0, 0) - \overline{f(t, x_0, 0)}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{dx_1(t, x_0)}{dt}\right| = |f(t, x_0, 0) - \overline{f(t, x_0, 0)}| \leqslant |2f(t, x_0, 0)| \leqslant 2M,$$

т. е. в силу условия (5) имеем, что $c \leqslant \frac{dx_1(t, x_0)}{dt} \leqslant d$ при $t\in R$.

Предположим, что $a \leqslant x_m(t, x_0) \leqslant b$ и $c \leqslant \frac{dx_m(t, x_0)}{dt} \leqslant d$ для всех m, меньших некоторого целого $k\,(k \geqslant 1)$ и всех $t \in R$. Из соотношения (10), определяющего $x_{k+1}(t, x_0)$, находим, что

$$|x_{k+1}(t, x_0) - x_0| \leqslant \left| Lf\left(t, x_m(t, x_0), \frac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right)\right|.$$

Из последнего неравенства с учетом того, что $x_m(t, x_0)$ и $\frac{dx_m(t, x_0)}{dt}$ принадлежат области (2), и из неравенств (3) и (9) получаем

$$|x_{k+1}(t, x_0) - x_0| \leqslant \frac{MT}{2}.$$

Аналогично

$$\left|\frac{dx_{k+1}(t, x_0)}{dt}\right| \leqslant \left| f\left(t, x_k(t, x_0), \frac{dx_k(t, x_0)}{dt}\right) - \overline{f\left(t, x_k(t, x_0), \frac{dx_k(t, x_0)}{dt}\right)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| 2f\left(t, x_k(t, x_0), \frac{dx_k(t, x_0)}{dt}\right)\right| \leqslant 2M,$$

т. е. получаем, что $a \leqslant x_{k+1}(t, x_0) \leqslant b$ и $c \leqslant \frac{dx_{k+1}(t, x_0)}{dt} \leqslant d$ для всех $t \in R$, лишь только $x_0 \in I_f$.

Таким образом, доказано, что функции последовательности (10) удовлетворяют неравенствам

$$a \leqslant x_m(t, x_0) \leqslant b, \quad c \leqslant \frac{dx_m(t, x_0)}{dt} \leqslant d \tag{16}$$

для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in R, \quad x_0 \in I_f$.

Для доказательства сходимости последовательности (10) оценим разность $x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)\,|$. Обозначим через $w_m(t)$ выражение

$$w_m(t) = f\left(t, x_m(t, x_0), \frac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right) - f\left(t, x_{m-1}(t, x_0), \frac{dx_{m-1}(t, x_0)}{dt}\right). \tag{17}$$

Имеем

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant |Lw_m(t)| \leqslant \alpha_1(t)\,|w_m(t)|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1(t)\left(K_1\,|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)|_0 + K_2\left|\frac{dx_m(t, x_0)}{dt} - \frac{dx_{m-1}(t, x_0)}{dx}\right|_0\right). \tag{18}$$

Дифференцируя тождество (10), находим также

$$\left|\frac{dx_{m+1}(t, x_0)}{dt} - \frac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right| \leqslant |w_m(t) - \overline{w_m(t)}| \leqslant 2\,|w_m(t)|_0 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(K_1\,|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)|_0 + K_2\left|\frac{dx_m(t, x_0)}{dt} - \frac{dx_{m-1}(t, x_0)}{dt}\right|_0\right). \tag{19}$$

Объединяем неравенства (18) и (19) векторной записью

$$z_{m+1}(t) \leqslant Q(t)\,z_m^0, \tag{20}$$

где

$$z_{m+1}(t) = \begin{pmatrix} |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \\ \left|\frac{dx_{m+1}(t, x_0)}{dt} - \frac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right| \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t)K_1, & \alpha_1(t)K_2 \\ 2K_1, & 2K_2 \end{pmatrix};$$

$$z_m^0 = \begin{pmatrix} |x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)|_0 \\ \left|\dfrac{dx_m(t, x_0)}{dt} - \dfrac{dx_{m-1}(t, x_0)}{dt}\right|_0 \end{pmatrix}, \quad z_1^0 \leqslant \begin{pmatrix} \dfrac{MT}{2} \\ 2M \end{pmatrix}.$$

Из неравенства (20) следует, что

$$z_{m+1}^0 \leqslant Q_0 z_m^0, \tag{21}$$

где

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{T}{2} K_1, & \dfrac{T}{2} K_2 \\ 2K_1, & 2K_2 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Итерируя неравенство (21), получаем

$$z_{m+1}^0 \leqslant Q_0^m z_1^0, \tag{23}$$

что ведет к оценке

$$\sum_{i=1}^{m} z_i^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} Q_0^{i-1} z_1^0. \tag{24}$$

Так как матрица Q_0 имеет собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2K_2 + \dfrac{T}{2} K_1$, меньшие 1 (см. неравенство (6)), то ряд (24) равномерно сходится:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} Q_0^{i-1} z_1^0 = \sum_{i=1}^{\infty} Q_0^{i-1} z_1^0 = (E - Q_0)^{-1} z_1^0. \tag{25}$$

Соотношение (25) означает равномерную сходимость последовательности. $\left(x_m(t, x_0), \dfrac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right)$: $\lim\limits_{m \to \infty} x_m(t, x_0) = x^0(t, x_0)$, $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{dx_m(t, x_0)}{dt} = \dfrac{dx^0(t, x_0)}{dt}$

Для отклонения $\left(x_m(t, x_0), \dfrac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right.$ от $\left.(x^0(t, x_0), \dfrac{dx^0(t, x_0)}{dt}\right)$ на основании неравенства (23) получаем оценку (13).

Переходя в рекуррентном соотношении (10) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что предельная функция $x^0(t, x_0)$ удовлетворяет уравнению (12), что и завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Наряду с системой (1) будем рассматривать также уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) - \mu. \tag{26}$$

Следуя работе [3], Δ-постоянной в точке $(0, x_0)$ относительно уравнения (1) назовем значение параметра μ, при котором решение уравнения (26), принимающее при $t = 0$ значение $x = x_0$, является периодическим с периодом T при условии, что такое значение μ единственно.

Из леммы следует, что

$$\mu = \Delta(x_0) = f\overline{\left(t, x^0(t, x_0), \frac{dx^0(t, x_0)}{dt}\right)} \tag{27}$$

при условии, что уравнение (1) — T-система и $x_0 \in I_f$.

Иными словами, формула (27) дает решение следующей периодической задачи управления: для уравнения (26) выбрать параметр (управление) μ так, чтобы решение этого уравнения, проходящее при $t = 0$ через точку $x = x_0$, было периодическим периода T.

Приведенная ниже теорема показывает, что лемма описывает также алгоритм построения приближенного периодического решения уравнения (1), являющегося T-системой при условии, что известна точка $x = x_0$, через которую при $t = 0$ проходит это решение.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) — *T-система в области* (2). *Тогда, если уравнение* (1) *имеет периодическое периода T решение $x = x(t)$, принимающее при $t = 0$ значение x_0, то*

$$x(t) = x^0(t, x_0), \tag{28}$$

где x^0 (t, x_0) — предел последовательности функций x_m (t, x_0), определяемых согласно (10).

Доказательство. Действительно, если $x(t)$ — периодическое периода T решение уравнения (1), то, очевидно, $\overline{f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)} = 0$. Следовательно, $\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) - \overline{f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)}$ или $x(t) = x_0 + \int_0^t \left[f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) - \overline{f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)}\right] dt$, т. е. $x(t) = x_0 + Lf\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)$, откуда и вытекает, что $x(t)$ — решение уравнения (12).

Для завершения доказательства покажем, что уравнение (12) для всех точек $x_0 \in I_f$ имеет единственное решение.

Предположим противное. Тогда найдутся, по крайней мере, два различных решения $x_t = x(t, x_0)$ и $y_t = y(t, x_0)$ уравнения (12). Для их разности получаем тождество

$$|x_t - y_t| = \left| L\left(f\left(t, x_t, \frac{dx_t}{dt}\right) - f\left(t, y_t, \frac{dy_t}{dt}\right)\right)\right|, \tag{29}$$

оценивая которое, находим

$$|x_t - y_t| \leqslant \alpha_1(t) \left| f\left(t, x_t, \frac{dx_t}{dt}\right) - f\left(t, y_t, \frac{dy_t}{dt}\right)\right|,$$

или

$$|x_t - y_t| \leqslant \frac{T}{2}\left(K_1 |x_t - y_t|_0 + K_2 \left|\frac{dx_t}{dt} - \frac{dy_t}{dt}\right|_0\right). \tag{30}$$

Дифференцируя (29), получаем

$$\left|\frac{dx_t}{dt} - \frac{dy_t}{dt}\right| \leqslant 2K_1 |x_t - y_t|_0 + 2K_2 \left|\frac{dx_t}{dt} - \frac{dy_t}{dt}\right|_0. \tag{31}$$

Объединяя неравенства (30) и (31), получаем

$$\begin{pmatrix} |x_t - y_t|_0 \\ \left|\frac{dx_t}{dt} - \frac{dy_t}{dt}\right|_0 \end{pmatrix} \leqslant Q_0 \begin{pmatrix} |x_t - y_t|_0 \\ \left|\frac{dx_t}{dt} - \frac{dy_t}{dt}\right|_0 \end{pmatrix},$$

итерируя которое, находим

$$\begin{pmatrix} |x_t - y_t|_0 \\ \left|\frac{dx_t}{dt} - \frac{dy_t}{dt}\right|_0 \end{pmatrix} \leqslant Q_0^m \begin{pmatrix} |x_t - y_t|_0 \\ \left|\frac{dx_t}{dt} - \frac{dy_t}{dt}\right|_0 \end{pmatrix}.$$

Но $Q \to 0$ при $m \to \infty$ так, что, переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем равенства $x_t = y_t$, $\frac{dx_t}{dt} = \frac{dy_t}{dt}$, противоречащие предположению.

Из единственности решения уравнения (12) следует, что $x(t) = x^0(t, x_0)$. Теорема 1 доказана.

Из уравнения (12) видно, что всякое его решение, для которого

$$\Delta(x_0) = \overline{f\left(t, x^0(t, x_0), \frac{dx^0(t, x_0)}{dt}\right)} = 0, \tag{32}$$

периодическое решение уравнения (1) такое, что $x(0) = x_0$. Поэтому вопрос существования периодического периода T решения уравнения (1) однозначно связан с вопросом существования нулей функции $\Delta(x_0)$, имеющей вид (32).

Так как функция $\Delta(x_0)$ находится лишь приближенно, исходя из последовательности функций

$$\Delta_m(x_0) = \overline{f\left(t, x_m(t, x_0), \frac{dx_m(t, x_0)}{dt}\right)}, \tag{33}$$

то возникает задача, как по нулям функции $\Delta_m(x_0)$ заключить о нулях функции $\Delta(x_0)$. Решению этой задачи помогает оценка

$$|\Delta_m(x_0) - \Delta(x_0)| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \left| f\left(s, x_m(s, x_0), \frac{dx_m(s, x_0)}{ds}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(s, x^0(s, x_0), \frac{dx^0(s, x_0)}{ds}\right)\right| ds \leqslant K_1 |x^0(t, x_0) - x_m(t, x_0)|_0 + \tag{34}$$

$$+ K_2 \left| \frac{dx^0(t, x_0)}{dt} - \frac{dx_m(t, x_0)}{dt} \right|_0 \leqslant \left(\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}, \quad Q_0^m (E - Q_0)^{-1} z_1^0\right) = d_m,$$

где $(\cdot\,,\,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве E_2.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) — *Т-система в области* (2). *Предположим, что для некоторого $m \geqslant 0$ функция $\Delta_m(x_0)$, определяемая формулой (33), удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{x_0 \in I_f} \Delta_m(x_0) \leqslant -d_m, \quad \max_{x_0 \in I_f} \Delta_m(x_0) \geqslant d_m. \tag{35}$$

Тогда уравнение (1) *имеет периодическое периода* T *решение* $x = x(t)$, *для которого* $x(t)$ *принадлежит области* (2), $x(0) \in I_f$.

При доказательстве теоремы 2 учитывается оценка (34) и то, что функции $\Delta_m(x_0)$ и $\Delta(x_0)$ определены и непрерывны для всех $x_0 \in I_f$.

Теорема 3. *Пусть правая часть уравнения (1) — полином относительно x и $y = \frac{dx}{dt}$ и удовлетворяет неравенствам (3) — (6). Тогда, если уравнение (1) имеет периодическое периода T решение, то оно имеет по одному периодическому решению либо для каждого значения $x(0) = x_0$ отрезка I_f, либо для конечного числа таких значений.*

Как установлено, отыскание начальных значений периодических решений уравнения (1), являющегося T-системой в области (2), равносильно отысканию нулей функции $\Delta(x_0)$.

Согласно (34) для всякого нуля x^0 функции (Δx_0) имеем

$$|\Delta_m(x^0)| \leqslant d_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{36}$$

Все нули функции $\Delta(x_0)$ содержатся, следовательно, среди решений неравенства (36). Поэтому любую точку x^0, удовлетворяющую (36), можно принять за m-е приближение к начальному значению $x(0) = x_0$ периодического решения.

Таким образом, вопрос отыскания начальных значений $x(0) = x_0$ периодических решений уравнения (1) сводится к нахождению нулей функции

$\Delta_m(x_0)$ или, если таковых нет, к отысканию точек, удовлетворяющих неравенству (36).

Проиллюстрируем изложенное на примере уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 \cos \pi t + 0{,}05 \sin x + \gamma \sin \pi t, \qquad (37)$$

рассматривая его для $|x| \leqslant a, \ |y| = \left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant b.$

Легко увидеть, что неравенства (3), (4) удовлетворяются при $M = b^5 + 0{,}05 + |\gamma|, \ K_1 = 0{,}05, \ K_2 = 5b^4$.

Накладывая на постоянные a, b и параметр γ условия (5), (6) и (35) (при $m = 0$), получаем систему неравенств:

$$a \geqslant b^5 + 0{,}05 + |\gamma|, \ b \geqslant 2(b^5 + 0{,}05 + |\gamma|), \ 10b^4 + 0{,}05 < 1,$$

$$0{,}05 \geqslant \frac{(b^5 + 0{,}05 + |\gamma|)\cdot(0{,}05 + 10b^4)}{0{,}95 - 10b^4}. \qquad (38)$$

Если a, b, γ удовлетворяют неравенствам (38), то согласно теореме 2 уравнение (37) имеет периодическое решение $x(t)$ периода $T = 2$, для которого $x(0)$ принадлежит отрезку $[-a + M, a - M]$.

Легко увидеть, что система неравенств (38) удовлетворяется при $0{,}11 \leqslant b \leqslant 0{,}4$. При этом пределы изменения параметра γ определяет неравенство $|\gamma| \leqslant \frac{b}{2} - b^5 - 0{,}05$.

Выбрав значения b и $|\gamma|$, значение постоянной a находим из неравенства $a \geqslant b^5 + 0{,}05 + |\gamma|$. Так, например, при $b = 0{,}2$ имеем $|\gamma| \leqslant 0{,}049$, $a \geqslant 0{,}11$; при $b = 0{,}4$ имеем $|\gamma| \leqslant 0{,}139$, $a \geqslant 0{,}2$ и т. д. Поскольку $\Delta_0(x_0) = 0{,}05 \sin x_0$, то возьмем $x_0 = 0$ в качестве приближенного значения начальной точки периодического решения. Тогда согласно (10) находим приближения искомого периодического решения

$$x_1(t, 0) = \frac{\gamma}{\pi}(1 - \cos \pi t), \quad x_2(t, 0) = \frac{\gamma}{\pi}(1 - \cos \pi t) +$$

$$+ \frac{\gamma^5}{\pi}\left(\frac{5}{96} - \frac{5}{64}\cos 2\pi t + \frac{1}{32}\cos 4\pi t - \frac{1}{192}\cos 6\pi t\right) +$$

$$+ \frac{1}{20}\int\limits_0^t \left[\sin\left(\frac{\gamma}{\pi} - \frac{\gamma}{\pi}\cos \pi t\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sin\left(\frac{\gamma}{\pi} - \frac{\gamma}{\pi}\cos \pi t\right) dt\right] dt$$

и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А. М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I.— Укр. мат. журн., 1965, **17**, № 4, с. 82—93.
2. Самойленко А. М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II — Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 2, с. 50—59.
3. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев : Вища школа, 1976.— 180 с.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 410 с.
5. Шлапак Ю. Д. О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 6, с. 850—854.

Киевское высшее военно-морское
политическое училище

Поступила в редакцию
15.VIII 1979 г.