УДК 517.944:62-50

П. И. Дудников, С. Н. Самборский

Критерий управляемости для систем в банаховом пространстве (обобщение теоремы Чжоу)

В работе исследуется вопрос об управляемости для системы

$$y'(t) = \sum_{i=0}^{n} u_i(t) f_i(y(t)), \tag{1}$$

где $u_i(t)$ — кусочно-непрерывные скалярные функции (управления), $y(t)$- принимает значения в банаховом пространстве B, f_i отображения в B. В случае, когда B конечномерно и отображения f_i гладкие, известная теорема Чжоу [1, 2] дает для системы (1) критерий полной управляемости. Мы обобщаем этот критерий на случай, когда B — произвольное банахово пространство и (самое важное!) когда одно из отображений, пусть f_0, не является непрерывным. Интерес к такому случаю вызван рассмотрением систем (1), где f_0 — дифференциальный оператор в функциональном банаховом пространстве B. Таким образом, предлагаемое обобщение позволяет рассматривать некоторые классы управляемых систем, описываемых уравнениями с частными производными. Метод доказательства (новый даже в конечномерном случае) основывается на одном факте о строении замкнутых подмножеств банахова пространства, который может представлять самостоятельный интерес и выделен отдельной теоремой.

1. Пусть B, B_+, B_{++} — действительные банаховы пространства, B_+ плотно вложено в B, B_{++} плотно вложено в B_+, $I:B_+ \to B$ и $J:B_{++} \to B_+$ — непрерывные операторы вложения, U, V, W — открытые связные подмножества в пространствах B, B_+, B_{++} соответственно, причем IV плотно в U, JW плотно в V.

Обозначим через $M^0(U, V, W)$ множество троек $\Phi = (\varphi, \varphi^+, \varphi^{++})$ бесконечно дифференцируемых отображений $\varphi:U \to B, \varphi^+:V \to B_+$ и $\varphi^{++}:W \to B_{++}$ таких, что $I\varphi^+ = \varphi I$ и $J\varphi^{++} = J\varphi^+$ (т. е. φ^+, φ^{++} — сужения φ). На множестве M^0 определена структура алгебры Ли с операцией

$$[(\varphi, \varphi^+, \varphi^{++}), (\psi, \psi^+, \psi^{++})] = ([\varphi, \psi], [\varphi^+, \psi^+], [\varphi^{++}, \psi^{++}],$$

где $[\alpha, \beta](y) = D\alpha(y)\beta(y) - D\beta(y)\alpha(y)$ — обычная скобка Ли.

Пусть $F = (f, f^+)$ — пара дифференцируемых отображений $f:V \to B$, $f_+:W \to B_+$ таких, что $fJ = If_+$ (т. е. f_+ — сужение f). Определим скобку Ли пары $F = (f, f^+)$ и тройки $\Phi = (\varphi, \varphi^+, \varphi^{++}) \in M^0$ по правилу $[F, \Phi](\cdot) = (Df(\cdot)\varphi^+(\cdot) - D\varphi(\cdot)f(\cdot), Df^+(\cdot)(\varphi^{++}(\cdot) - D\varphi^+(\cdot)f^+(\cdot))$. Через $\mathrm{ad}_F\Phi$ обозначается отображение $[F, \Phi]$, $\mathrm{ad}_F^0\Phi = \Phi$ и $\mathrm{ad}_F^k\Phi = \mathrm{ad}_F\,\mathrm{ad}_F^{k-1}\Phi$, если $\mathrm{ad}_F^{k-1}\Phi \in M^0$. Мы говорим, что пара отображений $\alpha:V \to B, \alpha^+:W \to B_+$ принадлежит M^0, если существует тройка $(\beta, \beta^+, \beta^{++}) \in M^0$ и $I\beta^+ = \alpha$, $J\beta^{++} = \alpha^+$.

2. Предположение. Будем считать, что отображения f_0 и f_0^+ порождают локальные группы U_t и U_t^+ локальных диффеоморфизмов. Это означает, что для любого $y \in V$ найдутся окрестность $\mathfrak{D}_y$ точки I_y в U, содержащий нуль интервал T_y и отображения $U_t:\mathfrak{D}_y \to U$ при $t \in T_y$, обладающие свойствами:

1) $U_{t_1+t_2} = U_{t_1}\cdot U_{t_2}$, U_0 — тождественное отображение;

2) U_t переводит $\mathfrak{D}_y \cap IV$ в IV;

3) при $z \in V$ и $Iz \in \mathfrak{D}_y$ отображение $t \to U_tIz$ дифференцируемо и $d/dt\,(U_tI_z) = f_0(U_tz)$;

4) $\lim\limits_{t\to 0} U_tz = z$ при любом $z \in \mathfrak{D}_y$ (соответственно для любого $y \in W$ найдется окрестность $\mathfrak{D}_y$ точки Jy в V и т. д. с заменой U и на V, V на W, I на J и f_0 на f_0^+). Приведем типичный пример отображений, удовлетворяющих предположению. Пусть A — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве B, порождающий группу U_t класса C^0. Без ограничения общности можно считать, что 0 — регулярная точка для A. Превратим область определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора A в банахово пространство B_+, вводя норму $\|\cdot\|_+ = \|A\cdot\|$, и $\mathfrak{D}(A^2)$ в B_{++}, вводя норму $\|\cdot\|_{++} = \|A^2\cdot\|$. Из свойств инфинитезимальных операторов следует, что отображения $f_0:B_+ \to B$ и $f_0^+:B_{++} \to B$, порожденные оператором A и его сужением на $\mathfrak{D}(A)$, удовлетворяют сформулированному предположению [3].

3. Пусть $f_0:V \to B$, $f_i:U \to B\ (i \geqslant 1)$ — дифференцируемые отображения. Рассмотрим уравнение

$$(Iy)_t' = u_0(t)\,f_0(y(t)) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\,f_i(Iy(t)). \tag{2}$$

Определение. Точка $y_1 \in B$ достижима из точки $y_0 \in B$, если существуют такие кусочно-непрерывные управления $u_i(\tau)$ и решение $y(\tau)$ уравнения (2) с $\bar{u}_i(\tau)$ в правой части, что $y(0) = y_0$ и $y(t) = y_1$ при некотором $t \geqslant 0$. Множеством достижимости $R(y_0)$ из точки y_0 назовем замыкание множества всех достижимых из y_0 точек.

Теорема 1. *Пусть отображения $F_0 = (f_0, f_0^+)$ и $F_i = (f_i, f_i^+, f_i^{++})$ удовлетворяют предположениям п. 2, при любом $k \geqslant 0$ $\mathrm{ad}_{F_0}^k F_i \in M^0(U, V, W)$ и L — наименьшая подалгебра Ли в M^0, содержащая все отображения $\mathrm{ad}_{F_0}^k F_i\ (k = 0, 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, n)$.*

Если в каждой точке $y \in V$ замкнутая линейная оболочка векторов $\{\varphi(Iy) \mid (\varphi, \varphi^+, \varphi^{++}) \in L\}$ совпадает с B, то для любого $y_0 \in V$ множество достижимости из точки Iy_0 для системы (2) совпадает с замыканием U.

Доказательство. Пусть $\Phi = (\varphi, \varphi^+, \varphi^{++}) \in M^0(U, V, W)$. Предположим, что для каждого y из множества достижимости $R(y_0)$ существуют интервал $[0, \alpha_y]$ и кривая $\gamma_\Phi(y, \cdot):[0, \alpha_y] \to B$, дифференцируемая в нуле и такая, что 1) $\gamma_\Phi(y, 0) = y$; 2) $\partial/\partial t(\gamma_\Phi(y, t)|_{t=0} = \varphi(y)$; 3) $\gamma_\Phi(y, t) \in R(y_0)$ при всех $t \in [0, \alpha_y]$.

Семейство кривых со свойствами 1)—3) будем называть допустимым семейством для отображения Φ.

Лемма 1. *Если отображения Φ, Ψ обладают допустимыми семействами кривых, то отображение $\alpha[\Phi, \Psi] + \beta\Phi + \delta\Psi$ также обладает допустимым семейством кривых при любых действительных α, β, δ.*

Лемма 2. *Если отображение Φ обладает допустимым семейством кривых и $[F_0, \Phi] \in M^0$, то отображение $\alpha[F_0, \Phi] + \beta\Phi$ также обладает допустимым семейством кривых.*

В лемме 1 искомые кривые строятся следующим образом:

$$t \to \gamma(y, t) = \gamma_\Psi(\gamma_\Phi(\gamma_\Psi(\gamma_\Phi(y, \beta t + \alpha\sqrt{t}), \delta t + \alpha\sqrt{t}), -\alpha\sqrt{t}), -\alpha\sqrt{t}).$$

Для доказательства леммы 2 построим кривую

$$t \to \gamma(y, t) = \gamma_\Phi(U_{-\alpha\sqrt{t}}(\gamma_\Phi(U_{\alpha\sqrt{t}}y, \beta t + \alpha\sqrt{t})), -\alpha\sqrt{t}) \tag{3}$$

для $y \in R(y_0)$, где U_τ — локальная группа отображений в B, описанная в п. 2. Если $y \in W$, то кривые $\tau \to U_\tau IJy$ дважды дифференцируемы, как следует из предположений п. 2, и, кроме того, имеют место разложения в начальные фрагменты ряда Тейлора $U_\tau IJy = IJy + \tau If_0^+(y) + \frac{\tau^2}{2} Df_0(Jy)f_0^+(y) + \nu(\tau)$, $U_\tau IJy = IJy + \tau If_0^+(y) + I\mu(\tau)$, где $\tau^{-2}\|\nu(\tau)\|_B \to 0$ и $\tau^{-1}\|\mu(\tau)\|_{B_+} \to 0$ при $\tau \to 0$.

Подставляя эти разложения в (3) и производя стандартные вычисления с учетом написанных разложений, получим, используя групповые свойства отображений U_τ, что для $y \in R(y_0) \cap IJW$ $\lim\limits_{t\to 0}(\gamma(y, t) - y)/t = \alpha[F_0, \Phi](y) + \beta\Phi(Iy)$ (в $[F_0, \Phi]$ взята компонента, лежащая в B).

Поскольку отображение $\alpha[F_0, \Phi] + \beta\Phi$ непрерывно в U, то и отображение $y \to \lim(\gamma(y, t) - y)/t$ расширяется до непрерывного в U. Следовательно, кривая $t \to \gamma(y, t)$ дифференцируема по t в нуле для произвольного $y \in U$. Лемма 2 доказана.

Занумеруем и обозначим через $F_k = (f_k, f_k^+, f_k^{++})$ при $k > n$ все отображения вида $\mathrm{ad}_{F_0}F_i$, $\mathrm{ad}_{F_i}F_j$, $\mathrm{ad}^2_{F_0}F_i, \ldots$, образующие вместе с $F_1, \ldots, F_n$ подалгебру L, но так, чтобы F_k получалось применением скобок Ли к отображениям F_i с номерами i, меньшими k. Возьмем произвольную точку $y \in R(y_0)$ и вектор $f \in B$. По условию теоремы сколь угодно близко от f найдется вектор $\tilde{f}$ вида $\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i f_i(y)$. Поскольку отображения $F_1, \ldots, F_n$ обладают допустимыми семействами кривых (получающихся как траектории системы (1) при управлениях вида $u_i(t) = 0$ для $i \neq k$, $u_k(t) = \pm 1$), то в силу лемм 1 и 2 существует кривая $\gamma:[-\alpha, \alpha] \to B$ со свойствами: 1) $\gamma(0) = y$; 2) $\gamma'(0) = \tilde{f}$; 3) $\gamma(t) \in R(y_0)$ при $t \in [0, \alpha]$. Следовательно, каковы бы ни были телесный конус K с вершиной в точке $y \in R(y_0)$ и осью, направленной по вектору f, а также окрестность $\mathfrak{D}$ точки y в B, найдется такая кривая $\gamma(t) \in R(y_0)$, что $y(0) = y$ и для достаточно малых $t > 0$ $\gamma(t) \in k \cap \mathfrak{D}$. Поэтому множество $K \cap \mathfrak{D} \cap R(y_0)$ содержит кроме y и другие точки из

$R(y_0)$. Однако в силу приведенной ниже теоремы это возможно лишь в случае, если $R(y_0)$ совпадает с замыканием U. Теорема доказана.

4. Теорема 2. *Пусть B — банахово пространство, $U \subset B$ — открытое связное множество в B, M — подмножество в U, замкнутое в индуцированной топологии, не совпадающее с U. Тогда существует точка $y_0 \in M$, телесный конус K с вершиной в точке y_0 и окрестность $W \subset U$ точки y_0 такие, что $K \cap W \cap M = \{y_0\}$.*

Доказательство. Пусть $B_0 \subset U$ и $B_r \subset B_0$ — такие замкнутые шары, что $B_0 \cap M \neq \varnothing$, $B_0 \cap M \neq M$, $B_r \cap M = \varnothing$, r — радиус шара B_r, x_1 — его центр. Рассмотрим конус $K_{y_1} = \{y_1 + \lambda(x - y_1),\ x \in B_{r/2},\ \lambda \geqslant 0\}$, где $y_1 \in B_0 \cap M$, а $B_{r/2}$ — шар радиуса $r/2$ с центром в точке x_1. Замкнутое множество $M_1 = \{\lambda y_1 + (1-\lambda)x,\ x \in B_{r/2},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \cap M$ принадлежит конусу K_{y_1} и ограничено, так как $M_1 \subset \{\lambda y_1 + (1-\lambda)x,\ x \in B_{r/2},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$, а множество $\{\lambda y_1 + (1-\lambda)x,\ x \in B_{r/2},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ ограничено. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Существуют точка $y_0 \in M$ и телесный конус K_{y_0} такие, что $M_1 \cap K_{y_0} = \{y_0\}$.*

Доказательство. Пусть $l(x) = c$ — гиперплоскость, разделяющая точки y_1 и шар $B_{r/2}$; $l(y_1) < c$. Проекцией множества M_1 на ось $y_1 + \lambda(x_1 - y_1)$ параллельно гиперплоскости $l(x) = c$ является множество точек вида $y_1 + ((l(y) - l(y_1))/l(f))f$, где $f = x_1 - y_1$, $y \in M_1$. Ясно, что $(l(y) - l(y_1))/l(f) \geqslant 0$ при $y \in M_1$. Пусть $d = \sup_{y \in M_1} (l(y) - l(y_1))/l(f)$. Если $d = 0$, то конус K_{y_1} будет искомым. Поэтому будем считать, что $d > 0$, и положим $\bar{K}_{y_1} = K_{y_1} \cap \{x \mid l(x) \leqslant l(y_1) + dl(f)\}$. Легко показать, что множество $\bar{K}_{y_1}$ ограничено и $M_1 \subset \bar{K}_{y_1}$. Так как $d > 0$, то существует точка $y_2 \in \bar{K}_{y_1} \cap M_1$ такая, что $(l(y_2) - l(y_1))/l(f) > d/2$.

Рассмотрим конус K_{y_2}, полученный из конуса K_{y_1} параллельным переносом на вектор $y_2 - y_1$. Если при этом $K_{y_2} \cap M_1 = \{y_2\}$, то лемма доказана. Поэтому допустим, что $K_{y_2} \cap M_1 = M_2 \neq \{y_2\}$. Положим $\bar{K}_{y_2} = K_{y_2} \cap \{x \mid l(x) \leqslant l(y_1) + dl(f)\}$ и найдем диаметр множества $\bar{K}_{y_2}$. Сделаем параллельный перенос пространства B на вектор $y_1 - y_2$. Тогда конус K_{y_2} перейдет в конус K_{y_1}, а множество $\{x \mid l(x) \leqslant l(y_1) + dl(f)\}$ — в множество $\{x \mid l(x) \leqslant 2l(y_1) - l(y_2) + dl(f)\}$. Поэтому K_{y_2} перейдет в $K'_{y_2} = K_{y_1} \cap \{x \mid l(x) \leqslant 2l(y_1) - l(y_2) + dl(f)\}$. Пусть гиперплоскость $l(x) = l(y_1) + dl(f)$ пересекает ось $\{y_1 + \lambda f\}$ в точке $y_1 + \lambda_1 f$, а гиперплоскость $l(x) = 2l(y_1) - l(y_2) + dl(f)$ — в точке $y_1 + \lambda_2 f$. Тогда, очевидно, множества K'_{y_2} и $\bar{K}_{y_1}$ гомотетичны с коэффициентом гомотетии $k_1 = \lambda_2/\lambda_1$. Поэтому $d_2 = \operatorname{diam} \bar{K}_{y_2} = \operatorname{diam} K'_{y_2} = k_1 \operatorname{diam} \bar{K}_{y_1} = k_1 d_1$, где $d_1 = \operatorname{diam} \bar{K}_{y_1}$. Легко увидеть, что $\lambda_1 = d$, $\lambda_2 = d - (l(y_2) - l(y_1))/l(f) < d/2$. Следовательно, $k_1 = \lambda_2/\lambda_1 < 1/2$, поэтому $d_2 = k_1 d_1 < d_1/2$.

Проектируя на ось $y_1 + \lambda f$ множество M_2 аналогично предыдущему, находим точку y_3, строим множество $\bar{K}_{y_3}$ и доказываем, что $d_3 = \operatorname{diam} \bar{K}_{y_3} < \frac{1}{2} \operatorname{diam} \bar{K}_{y_2} < d_1/4$.

Продолжая эту процедуру, на n-м шаге получаем точку y_n и множество $M_n = K_{y_n} \cap M_1$ такие, что $y_n \in M_{n-1} \subset \bar{K}_{y_{n-1}}$, $\bar{K}_{y_n} \subset \bar{K}_{y_{n-1}}$, $\operatorname{diam} \bar{K}_{y_n} < d_1/2^n$. Отсюда следует, что последовательность y_n фундаментальна в замкнутом множестве B_0 и поэтому сходится к некоторому элементу $y_0 \in B_0 \subset U$. Так как M_1 замкнуто в U и $y_n \in M_1$ то $y_0 \in M_1$. Рассмотрим конус K_{y_0}, полученный из конуса K_{y_1} параллельным переносом на вектор $y_0 - y_1$. Покажем, что $K_{y_0} \cap M_1 = \{y_0\}$. Поскольку $y_0 \in K_{y_0} \cap M_1$, то достаточно показать, что $\operatorname{diam}(K_{y_0} \cap M_1) = 0$. При всех n справедливо включение $K_{y_0} \cap M_1 \subset K_{y_n} \cap M_1$, поэтому $\operatorname{diam}(K_{y_0} \cap M_1) \leqslant d_1/2^n \to 0$. Лемма доказана.

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ определим в U открытое подмножество $W = \left\{ x \in U \mid x = (1-\lambda)(y_1 - \varepsilon f) + \lambda y, 0 < \lambda < 1, \| y - x_1 \| < \frac{2r}{3} \right\}$. Легко показать, что $K_{y_1} \cap W \cap M = M_1$, поэтому $W \cap K_{y_0} \cap M = W \cap K_{y_1} \cap K_{y_0} \cap M = M_1 \cap K_{y_0} = \{y_0\}$. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть управляемая система имеет вид $y'_t = u_0(t) Ay + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) f_i$, где A — линейный инфинитезимальный оператор в банаховом пространстве B для группы U_t класса C^0, $f_i \in \bigcap_n \mathfrak{D}(A^n)$. Вычисляя скобки Ли $[f_i, f_j] = 0$, $\mathrm{ad}_A^k f_i = A^k f_i$, получим полную управляемость, если замыкание линейной оболочки векторов $\{A^k f_i \mid k = 0, 1, \ldots; i = 1, 2, \ldots, n\}$ совпадает с B.

Пример 2. Пусть управляемая система имеет вид $y'_t = u_0(t) y'_x + u_1(t) p(x) y$, где x принадлежит окружности S (функции на окружности отождествляются с периодическими на R) и p — гладкая функция на S. Пусть B — одно из пространств $C^k(S)$ или $W_2^k(S)$, $F_0(f)(x) = f'(x)$, $F_1(f)(x) = p(x) f(x)$, $B_+ = C^{k+1}(S)$ или $W_2^{k+1}(S)$, $B_{++} = C^{k+2}(S)$ или $W_2^{k+2}(S)$. Вычисляя скобки Ли $(\mathrm{ad}_{F_0}^k F_1)(f)(x) = (\mathrm{d}^k/\mathrm{d}x^k\, p(x)) f(x)$, получим, что для функции y_0 на S, не обращающейся в нуль, множество достижимости $R(y_0)$ из y_0 содержит в B окрестность точки y_0 (полная локальная управляемость), если замкнутая линейная оболочка векторов $\mathrm{d}^k/\mathrm{d}x^k\, p(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ совпадает с B.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brockett R. W. Nonlinear systems and differential geometry.— Proceedings of J. E. E. E., 1967, **64**, N 1, p. 60—88.
2. Sussman H. J., Jurdjevic V. Controllability of nonlinear systems.— J. Differential Equations, 1972, **12**, N 3, p. 95—116.
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.— 464 с.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
9.I 1979 г.