УДК 518:517.948

А. А. Фонарев

О проекционно-итерационном методе наискорейшего спуска

Рассматривается проекционно-итерационный метод решения нелинейных уравнений, в котором последовательные приближения принадлежат конечномерным подпространствам бесконечномерного банахова пространства, являющийся проекционным аналогом метода наискорейшего спуска [1].

Пусть E — вещественное сепарабельное банахово пространство такое, что заданы: 1) последовательность конечномерных подпространств $\{E_i\}$ пространства E, объединение которых плотно в E и $E_i \subset E_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots$; 2) последовательность непрерывных линейных операторов P_i из E на E_i такая, что $P_i x = x$ для любого $x \in E_i$ и $\| P_i \| \leqslant P$ $(i = 1, 2, \ldots$; постоянная $P \geqslant 1)$. Известно, что для любого i оператор P_i^*, сопряженный оператору P_i, является оператором проектирования пространства E^*, сопряженного E, на конечномерное подпространство $E_i^* \subset E^*$, размерность которого совпадает с размерностью пространства E_i, и что $\| P_i^* \| \leqslant P$ для $i = 1, 2, \ldots$.

Для отображения $F: E \to E^*$ рассмотрим проекционно-итерационный процесс

$$x_{i+1} = x_i - t_i P_{i+1} U P_{i+1}^* F(x_i), \quad t_i > 0 \tag{1}$$

$(i = 1, 2, \ldots; x_1 \in E_1)$, где U — дуальное отображение из E^* в E (см. [1]), т. е. $\langle y, U(y) \rangle = \| y \|^2 = \| U(y) \|^2$ для любого $y \in E^*$ (здесь и далее $\langle z, x \rangle$ — значение линейного функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$). Процесс (1) — проекционно-итерационный аналог процесса наискорейшего спуска (см. [1]). Если $f(x)$ — вещественный дифференцируемый по Гато функционал, заданный в E, а отображение F — его градиент (см. [1]), то проекционно-итерационный процесс (1) будем называть релаксационным, если $f(x_i) \geqslant f(x_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ для последовательности $\{x_i\}$ процесса (1).

Используя сказанное, сформулируем две леммы, доказательство которых легко провести, следуя схеме доказательства лемм 11.1 и 11.2 из [1].

Лемма 1. *Пусть вещественный функционал $f(x)$, заданный в E, дифференцируем по Гато и его градиент $F(x)$ удовлетворяет условию $\langle F(x+h) - F(x), h \rangle \leqslant M(r) \| h \|^2$ $(x, x+h \in \{x \in E : \| x \| \leqslant r\})$, где $M(r)$ — неубывающая функция, заданная для $r \geqslant 0$. Тогда, если $t_i M_i P^2 \leqslant 1/2$, где $M_i = \max(1, M(R_i))$, $R_i \geqslant \| x_i \| + P \| P_{i+1}^* F(x_i) \|$, то процесс (1) релаксационный.*

Действительно, так же, как при доказательстве леммы 11.1 из [1], используя равенства $\langle P_{i+1}^* y, x \rangle = \langle y, P_{i+1} x \rangle$, справедливые для всех $y \in E^*$ и $x \in E$, для последовательности $\{x_i\}$ процесса (1) имеем $f(x_i) - f(x_{i+1}) \geqslant$ $\geqslant 2^{-1} t_i \| P_{i+1}^* F(x_i) \|$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Пусть: 1) выполнены условия леммы 1; 2) функционал $f(x)$ ограничен снизу и возрастающий, а его градиент $F(x)$ — ограниченное отображение из E в E^* (определения см. в [1]). Тогда, если $1/4 \leqslant t_i M_i P^2 \leqslant$ $\leqslant 1/2$, где $M_i = \max(1, M(R_i))$, $R_i = \| x_i \| + P \| P_{i+1}^* F(x_i) \|$, то процесс (1) релаксационный и $P_{i+1}^* F(x_i) \to 0$ при $i \to \infty$.*

Действительно, из ограниченности последовательности $\{x_i\}$ процесса (1), вытекающей из леммы 1 и условия 2) леммы 2, и из доказательств лемм 11.2 из [1] и 1 следует, что существует постоянная $M_0 \geqslant 1$ такая, что $f(x_i) - f(x_{i+1}) \geqslant (8 M_0 P^2)^{-1} \| P_{i+1}^* F(x_i) \|$ для $i \geqslant 1$, что доказывает лемму 2

Далее понадобится (см. [2, с. 179]) определение.

Определение 1. Отображение $A : E \to E^*$ удовлетворяет условию α_0), если из слабой сходимости u_i к u_0 в E, слабой сходимости $A(u_i)$ к нулю в E^* и $\langle A(u_i), u_i - u_0 \rangle \to 0$ $(i \to \infty)$ следует, что u_i сходится к u_0 в E и $A(u_0) = 0$.

Из леммы 2 и работы [3, с. 19] вытекает, что последовательность $\{F(x_i)\}$ слабо сходится к нулю в E^* для последовательности $\{x_i\}$ процесса (1) при выполнении условий леммы 2. Значит, справедлива такая лемма.

Лемма 3. *Пусть*: 1) *выполнены условия леммы* 2; 2) $F(x)$ *удовлетворяет условию* α_0). *Тогда, если* t_i *такие же, как в лемме* 2, *то процесс* (1) *релаксационный, а последовательность* $\{x_i\}$ *процесса* (1) *компактна и любая ее сходящаяся подпоследовательность сходится к некоторому решению уравнения*

$$F(x) = 0 \quad (x \in E). \tag{2}$$

Из леммы 3 следует теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 3 и уравнение* (2) *может иметь не более одного решения. Тогда, если* t_i *такие же, как в лемме* 2, *то процесс* (1) *релаксационный, а последовательность* $\{x_i\}$ *процесса* (1) *сходится к решению уравнения* (2).

Рассмотрим кратко функционалы, для которых можно гарантировать лишь слабую сходимость последовательности процесса (1).

Определение 2. Отображение $A : E \to E^*$ удовлетворяет условию β_0), если из слабой сходимости u_i к u_0 в E, слабой сходимости $A(u_i)$ к нулю в E^* и $\overline{\lim} \langle A(u_i), u_i - u_0 \rangle \leqslant 0$ $(i \to \infty)$ следует, что $\underline{\lim} \langle A(u_i), u_i - u_0 \rangle \geqslant \langle A(u_0), u_0 - v \rangle$ $(i \to \infty)$ для произвольного $v \in E$.

Условие β_0) тесно связано с условием псевдомонотонности (см. [2, с. 143]), хотя и слабее его.

Для функционалов, градиент которых удовлетворяет условию β_0), можно переформулировать лемму 3 и теорему 1, заменив условие 2) в лемме 3 на такое: $F(x)$ удовлетворяет условию β_0). При этом в лемме 3 компактность заменяется на слабую компактность, в лемме 3 и теореме 1 сходимость заменяется на слабую сходимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М.: Наука, 1972.— 416 с.
2. Скрыпник И. В. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений.— В кн.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М., 1976, т. 9, с. 131—254.
3. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.— 336 с.

Московский
институт стали и сплавов

Поступила в редакцию
28.XI 1978 г