УДК 513.8.

В. В. Шарко

Стабильная алгебра и теория Морса

Пусть Λ — нетерово кольцо такое, что каждый стабильно свободный модуль свободен. В работе рассматриваем левые конечнопорожденные модули над кольцом Λ. Обозначим через $\mu(M)$ минимальное число образующих модуля M.

Определение 1. Эпиморфизм $f: F \to M$ называется минимальным, если F — свободный модуль ранга $\mu(M)$.

Определение 2. Пусть $0 \leftarrow M \xleftarrow{f_0} F_0 \xleftarrow{f_1} F_1 \xleftarrow{f_2}$ — свободная резольвента модуля M, скажем, что резольвента минимальная, если $f_i : F_i \to \operatorname{Ker} f_{i-1}$ — минимальный эпиморфизм.

Лемма 1. *Пусть модуль $N = \Lambda \oplus M$, тогда* $\mu(N) = \mu(M) + 1$.

Доказательство несложно.

Теорема 1. *Пусть $0 \leftarrow M \xleftarrow{g_0} G_0 \xleftarrow{g_1} G_1 \xleftarrow{g_2}$ — произвольная свободная резольвента модуля M, $0 \leftarrow M \xleftarrow{f_0} F_0 \xleftarrow{f_1} F_1 \xleftarrow{f_2}$ — минимальная резольвента. Тогда $\mu(G_i) \geqslant \mu(F_i)$.*

Доказательство. На основании леммы Шануэля [1] можно сказать, что $G_0 \oplus \operatorname{Ker} f_0 \approx F_0 \oplus \operatorname{Ker} g_0$.

Из леммы 1 вытекает, что $\mu(G_0) + \mu(\operatorname{Ker} f_0) = \mu(F_0) + \mu(\operatorname{Ker} g_0)$, но $\mu(G_0) \geqslant \mu(F_0)$, значит, $\mu(\operatorname{Ker} f_0) \leqslant \mu(\operatorname{Ker} g_0)$, следовательно, $\mu(F_1) \leqslant \mu(G_1)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны.

Определение 3. Пусть $f : N \to M$ — гомоморфизм модулей. Утолщением f с помощью F называется гомоморфизм $f^F : N \oplus F \to M$, где второе слагаемое отправляется в 0.

Лемма 2. *Пусть $g : G \to M$ — эпиморфизм, где G — свободный модуль, $f : F \to M$ — минимальный эпиморфизм, тогда $f^G = g^F : T$ $(T \in GL(\Lambda))$.*

Лемма 2 играет основную роль при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $0 \leftarrow M \xrightarrow{g_0} G_0 \xleftarrow{g_1} G_1 \xleftarrow{g_2}$ — произвольная свободная резольвента модуля M. Тогда минимальная резольвента выделяется в ней прямым слагаемым, т. е. имеет место разложение*

$$\begin{array}{l} 0 \leftarrow M \xleftarrow{f_0} F_0 \xleftarrow{f_1} F_1 \xleftarrow{f_2} \\ \qquad\qquad\quad\; \oplus \qquad\;\; \oplus \\ 0 \leftarrow \qquad\quad\;\; \Gamma'_0 \xleftarrow{p_1} \Gamma_1 \xleftarrow{p_2} \end{array}$$

Теоремы 1, 2 обобщают известные результаты работы [2]. Следуя работе [1], введем следующее понятие. Если N — подмодуль модуля M, определим f rank (N, M) как максимальное значение тех целых $r \geqslant 0$, для которых N содержит прямое слагаемое модуля M, изоморфное Λ^r. Поскольку кольцо фиксировано, нижний индекс будем опускать. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть f-rank$(M, F) = r$, где F — свободный модуль, тогда*

$$f\text{-rank}\,(M \oplus \Lambda,\ F \oplus \Lambda) = 1 + r.$$

Таким образом, f-rank (M, F) хорошо ведет себя при стабилизации, что играет очень важную роль в топологических построениях.

Обозначим через $\{\mathbf{C}, \partial\}$ свободный цепной комплекс $\leftarrow C_{\lambda-1} \xleftarrow{\partial_\lambda} C_\lambda \xleftarrow{\partial_{\lambda+1}} C_{\lambda+1} \leftarrow$. Положим $Z_\lambda = \operatorname{Ker} \partial_\lambda$, $B_\lambda = \operatorname{Im} \partial_{\lambda+1}$.

Определение 4. $\varepsilon_\lambda(\mathbf{C}, \partial) = f\text{-rank}\,(Z_\lambda, C_\lambda) - f\text{-rank}\,(B_\lambda, C_\lambda)$.

Теорема 4. *Пусть $\{\mathbf{C}, \partial\}$ и $\{\bar{\mathbf{C}}, \bar\partial\}$ — цепные комплексы, гомотопически эквивалентные. Тогда $\varepsilon_\lambda(\mathbf{C}, \partial) = \bar\varepsilon_\lambda(\bar{\mathbf{C}}, \bar\partial)$.*

Хорошо известно, что с каждым многообразием можно связать цепной комплекс и, следовательно, введенный выше числовой инвариант ε_λ.

Следствие 1. *Если фундаментальная группа $\pi_1(M) \approx \pi$ многообразия M такая, что $\mathbf{Z}[\pi] \approx \Lambda$, то $\varepsilon_\lambda(M)$ — инвариант гомотопического типа.*

Обозначим через $F(M)$ пространство функций Морса на многообразии M, $F_\lambda(M)$ — это те функции Морса, у которых минимальное число критических точек индекса λ.

Определение 5. Точной функцией Морса на многообразии M называется функция $f \in \bigcap\limits_{\lambda} F_\lambda(M)$.

Вообще говоря, точная функция Морса существует не на всяком многообразии. Одним из препятствий является кручение Уайтхеда—Райдемастера.

Следующие теоремы обобщают известные теоремы Смейла [3].

Пусть M^n — компактное многообразие без края, $\pi_1(M^n) \approx \mathbf{Z}$, $n > 5$. $\tilde{M}^n$ — универсальное накрывающее пространство, на котором действует фундаментальная группа. $H_\lambda(\tilde{M})$ — модули гомологий универсального накрытия над групповым кольцом $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$. Известно, что гомологическая размерность $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$ равна 2. Пусть свободная минимальная резольвента модуля $H_\lambda(\tilde{M}^n)$ имеет вид $0 \leftarrow H_\lambda(\tilde{M}^n) \leftarrow F_0^\lambda \leftarrow F_1^\lambda \leftarrow F_2^\lambda \leftarrow 0$.

Теорема 5. *На M^n существует точная функция Морса.*

Теорема 6. *Точная функция Морса на M^n имеет по одной критической точке индексов* 0, 1, $n-1$, n *и* N_λ $(2 \leqslant \lambda \leqslant n-2)$ *критических точек индекса* λ, *где*

$$N_\lambda = \varepsilon_\lambda(M^n) + \varepsilon_{\lambda-1}(M^n) + \mu(F_1^{\lambda-1}) + \mu(F_2^{\lambda-2}) - \mu(F_0^{\lambda-1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Х. Алгебраическая K-теория.— М.: Мир, 1973.— 591 с.
2. Eilenberg S. Homological dimensions and syzygies.— Ann. of Math., 1956, **64**, N 2, p. 328 — 336.
3. Смейл С. О строении многообразий.— Математика, 1964, 8, № 4, с. 95—108.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
9.I 1979 г.