УДК 517.5

Н. В. Зорий

Оценки емкостей и энергий при перестройке конденсаторов

В работе [1] дано решение экстремальной проблемы А. А. Гончара о емкостях конденсаторов. Эта проблема относится к классу конденсаторов, которые существенно используются в работах по теории рациональной аппроксимации функций (см., например, [2, 3]). Для этой цели в [1] разработан метод дробления и специального перемешивания зарядов и установлены оценки их энергий.

В настоящем сообщении даются аналоги и обобщения некоторых результатов работы [1].

Всякую упорядоченную пару $(E^+, E^-) = E$ непересекающихся непустых замкнутых множеств E^+, E^- расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ будем называть конденсатором. Если E^+ и E^- содержатся в множестве G, то будем говорить, что конденсатор $E = (E^+, E^-)$ расположен на G.

Пусть K — некоторый фиксированный компакт на мнимой оси, содержащий начало координат. Через Φ_K обозначим класс всех конденсаторов, расположенных на множестве $\{-1 \leqslant x \leqslant 1\} \times K$, таких, что из соотношения $z \in E^+$ (аналогично $z \in E^-$) следует включение $\{\operatorname{Re} z\} \times K \subset E^+$ (соответственно $\{\operatorname{Re} z\} \times K \subset E^-$).

Пусть $\mathbf{R}$ — действительная ось комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Множества $E^+ \cap \mathbf{R}$ и $E^- \cap \mathbf{R}$ обозначим соответственно символами $E^+_{\mathbf{R}}$, $E^-_{\mathbf{R}}$.

Для измеримого множества $B \subset \mathbf{R}$ через $|B|$ обозначим его линейную лебегову меру.

Через Φ^c_K обозначим класс всех конденсаторов $E = (E^+, E^-) \in \Phi_K$ таких, что $|E^+_{\mathbf{R}}| = |E^-_{\mathbf{R}}|$. Через $\Phi_{K,*}$ — класс всех конденсаторов $E = (E^+, E^-) \in \Phi_K$ таких, что $E^+_{\mathbf{R}} = \{a^+ \leqslant x \leqslant 1\}$, $E^-_{\mathbf{R}} = \{-1 \leqslant x \leqslant a^-\}$, $-1 \leqslant a^- < a^+ \leqslant 1$. Определим однозначное отображение $s: \Phi_K \to \Phi_{K,*}$, каждому $E = (E^+, E^-) \in \Phi_K$ поставив в соответствие конденсатор $s(E) = E_* = (E^+_*, E^-_*) \in \Phi_{K,*}$ такой, что $|E^+_{*,\mathbf{R}}| = |E^+_{\mathbf{R}}|$, $|E^-_{*,\mathbf{R}}| = |E^-_{\mathbf{R}}|$.

Следуя терминологии работы [1], конденсатор $F = (F^+, F^-)$ будем называть противоположным конденсатору $E = (E^+, E^-) \in \Phi_K$, если F^+ и F^- получены в результате зеркального отражения в мнимой оси соответственно множеств E^+ и E^-. Далее, будем говорить, что конденсатор $F = (F^+, F^-)$ квазисовпадает с конденсатором $E = (E^+, E^-)$, если множества $(E^+ \cup F^+) \setminus (E^+ \cap F^+)$ и $(E^- \cup F^-) \setminus (E^- \cap F^-)$ имеют емкость нуль. Емкость конденсатора $E = (E^+, E^-)$ (см. [4 — 6]) обозначим через $\operatorname{cap} E$.

Основной результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $E \in \Phi^c_K$. *Тогда* $\operatorname{cap} E \geqslant \operatorname{cap} s(E)$, *причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда E квазисовпадает с $s(E)$ или с конденсатором, противоположным $s(E)$, или же когда* $\operatorname{cap} E = 0$.

Заметим, что в случае $K = \{0\}$ класс Φ_K совпадает с классом Φ (см. [1]) конденсаторов, расположенных на отрезке $[-1,1]$, класс $\Phi_{K,*}$ совпадает с классом $\Phi_* \subset \Phi$ конденсаторов, стандартных по А. А. Гончару, а классы Φ^c_K и $\Phi^c_{K,*} = \Phi^c_K \cap \Phi_{K,*}$ — собственные подклассы соответственно классов Φ и Φ_*. Поэтому при $K = \{0\}$ утверждение теоремы 1 — частный случай теоремы 2 работы [1], давшей полное положительное решение задачи А. А. Гончара (см. [1]). В [1] было также установлено, что для конденсаторов с «пластинами», расположенными в полосе $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, но не на $\mathbf{R}$, аналог теоремы 2 из [1] вообще говоря, не имеет места. Поэтому представляет интерес выделение тех классов конденсаторов с «пластинами» в полосе $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, для которых справедлив аналог теоремы 2 из [1]. Это и является главной целью настоящей заметки.

Для решения задачи А. А. Гончара в работе [1] разработан метод, названный там же методом перемешивания зарядов. Сущность его заключается в дроблении равновесного заряда (см. [6]) на стандартном конденсаторе и специальном перенесении раздробленного заряда на произвольно устроенный конденсатор с уменьшением общей энергии заряда (см. [6, 7]).

Метод перемешивания зарядов допускает обобщение для конденсаторов класса Φ_K, рассматриваемых в данной работе. Пусть $E=(E^+, E^-)\in \Phi_K$. Обозначим через Δ^+ и Δ^- минимальные (открытые) интервалы (в частности, они могут быть пустыми множествами), содержащие почти все (в смысле меры Лебега) точки соответственно множеств $E^+_{\mathbf{R}}$ и $E^-_{\mathbf{R}}$. Для конденсатора $E=(E^+, E^-)\in\Phi_K$, $|E^+_{\mathbf{R}}|>0$, $|E^-_{\mathbf{R}}|>0$, определим числа a^+, a^-, $b\in(-1,1)$ и отображение $\sigma(z)$ условиями $a^+=1-|E^+_{\mathbf{R}}|$, $a^-=-1+|E^-_{\mathbf{R}}|$, $\sigma(z)=\dfrac{z-b}{-1+bz}$, $\sigma(a^+)=a^-$.

Для конденсатора $F=(F^+, F^-)$ обозначим через $\mathfrak{N}^1(F)$ класс борелевских зарядов λ с жордановым разложением $\lambda=\lambda^+-\lambda^-$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{supp}\lambda^+\subset F^+$, $\operatorname{supp}\lambda^-\subset F^-$, $\lambda^+(\overline{\mathbf{C}})=\lambda^-(\overline{\mathbf{C}})=1$. Введем обозначение $I(\lambda)=\displaystyle\int\limits_{\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\lambda(z)\,d\lambda(\zeta)$ для интеграла энергии заряда λ и обозначим

$$V(F)=\inf_{\lambda\in\mathfrak{N}^1(F)} I(\lambda). \tag{1}$$

Далее, обозначим через $\mathfrak{N}^1_\sigma(E_*)$ класс зарядов $\lambda\in\mathfrak{N}^1(E_*)$, для которых верны соотношения $\lambda^+(dx\,dy)=\lambda^-(d\sigma(x)\,dy)$ $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall y\in K$, и примем обозначение

$$V_\sigma(E_*)=\inf_{\lambda\in\mathfrak{N}^1_\sigma(E_*)} I(\lambda). \tag{2}$$

Известно (см. [6]), что если класс $\mathfrak{N}^1(F)$ содержит в себе заряды с конечной энергией (как нетрудно видеть, это будет тогда и только тогда, когда (логарифмическая) емкость множеств F^+ и F^- положительна), то вариационная задача (1) допускает единственное решение $\bar\lambda\in\mathfrak{N}^1(F)$. Аналогичные утверждения можно доказать и для вариационной задачи (2).

Установлены также следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть* $|\Delta^+\cap\Delta^-|>0$. *Для всякого заряда* $\mu\in\mathfrak{N}^1_\sigma(E_*)$, $E_*=s(E)$, *существует заряд* $\nu\in\mathfrak{N}^1(E)$ *такой, что* $I(\nu)\leqslant I(\mu)-M$, $M\geqslant 0$. *В случае* $\sigma(z)=-z$ *можно указать конкретное* $M>0$, *зависящее только от* μ, $|E^+_{\mathbf{R}}|$, $|E^-_{\mathbf{R}}|$, $\delta=\dfrac{1}{2}\sup\limits_{x\in(-1,1)}\min\{|E^+_{\mathbf{R}}\cap(-1,x)|$, $|E^+_{\mathbf{R}}\cap(x,1)|$, $|E^-_{\mathbf{R}}\cap(-1,x)|$, $|E^-_{\mathbf{R}}\cap(x,1)|$ *и не зависящее от других свойств конденсатора* E.

Эта теорема аналогична той части утверждения теоремы 3 работы [1], в которой оценка $I(\nu)\leqslant I(\mu)-M$ и конкретное значение $M>0$, зависящее только от μ, $|F^+|$, $|F^-|$, $\delta=\dfrac{1}{2}\sup\limits_{x\in(-1,1)}\min\{|F^+\cap(-1,x)|$, $|F^+\cap(x,1)|$, $|F^-\cap(-1,x)|$, $|F^-\cap(x,1)|\}$, даны для всякого $F=(F^+, F^-)\in\Phi$ с аналогом условия $|\Delta^+\cap\Delta^-|>0$ (см. [1, с. 7]).

Следующая теорема аналогична теореме 4 из работы [1].

Теорема 3. *Пусть* $\Delta^+ \cap \Delta^- = \varnothing$ *и конденсатор* E, $\operatorname{cap} E > 0$, *не квазисовпадает ни с* E_*, *ни с конденсатором, противоположным* E_*. *Тогда для всякого заряда* $\mu \in \mathfrak{N}^1(E_*)$ *существует заряд* $\nu \in \mathfrak{N}^1(E)$ *такой, что* $I(\nu) < I(\mu)$.

Следствие. $\operatorname{cap} E \geqslant \dfrac{2\pi}{V_\sigma(E_*)} \quad \forall E \in \Phi_K.$

Теорема 1 и утверждение следствия получаются из теорем 2 и 3 с учетом равенства $\operatorname{cap} E = \dfrac{2\pi}{V(E)}$ (см. [6]) и единственности равновесного заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамразов П. М. Емкости конденсаторов и экстремальная задача А. А. Гончара.— Препринт 79.5.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.— 10 с.
2. Гончар А. А. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями.— Мат. сборник, 1969, **78**, № 4, с. 640—654.
3. Гончар А. А. Квазианалитические классы функций, связанные с наилучшими приближениями рациональными функциями.— Изв. АН АрмССР. Математика, 1971, **6**, № 2—3, с. 148—159.
4. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике.— М.: Физматгиз, 1962.— 336 с.
5. Хейман В. К. Многолистные функции.— М. Изд-во иностр. лит., 1960.— 180 с.
6. Bagby T. The Modulus of a Plane Condenser.— J. Math. and Mech., 1967, **17**, N 4, p. 315—329.
7. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 515 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.XII 1979 г.