УДК 517.512

В. И. Мельник

Тауберова теорема в метрике L для сверточных преобразований

Рассмотрим интегральное преобразование

$$g(v)=\int_E k(v-u)\,ds(u) \tag{1}$$

с ядром $k(u)$, измеримым по Борелю и интегрируемым на $E=(-\infty,+\infty)$. В работе указан класс функций $s(u)$, для которых из условия $\int_E |g(v)|\,dv<\infty$ следует, что $\int_E |ds(v)|<\infty$. Доказанная теорема применяется к методу суммирования Абеля. Без доказательства результаты этой работы изложены в кратком сообщении [1].

Определение. Будем говорить, что функция $s(v)$ принадлежит классу $|T|$, если: а) функция $s(v)$ имеет ограниченное изменение на каждом конечном интервале; б) существуют число μ и функции $\delta(\varepsilon)$, $\theta(v,\varepsilon)$, $\psi(v)$, определенные для $\varepsilon>0$ и $v\in E$, такие, что $0<\delta(\varepsilon)\leqslant 1$, $0<\mu\leqslant 1$, $\int_E d\psi(v)<\infty$, $\psi(v)$ возрастает, и неравенство $\operatorname{Re}\{e^{i\theta}ds(u)\}\geqslant\mu\,|ds(u)|-\varepsilon d\psi(u)$ выполнено для всех $u\in[v-\delta, v+\delta]$. Будем говорить, что функция $s(u)$ принадлежит классу $|T_0|$, если условие б) имеет место также при $\varepsilon=0$.

Теорема 1. *Пусть ядро $k(u)$ измеримо по Борелю и*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sup_{n\leqslant u<n+1}|k(u)|<\infty, \tag{2}$$

а его преобразование Фурье $K(x)=\int_E e^{-iux}k(u)\,du\neq 0$ для всех $x\in E$. Предположим также, что функция $s(u)$ принадлежит классу $|T|$ и

$$\int_v^{v+1}|ds(u)|\leqslant M \tag{3}$$

для $v\in E$. Тогда для каждого $c>0$ найдется константа C, зависящая только от c, μ, $\delta(\varepsilon)$, $\psi(v)$, $k(v)$, такая, что будет выполнено неравенство

$$\int_E|ds(v)|\leqslant c+C\int_E|g(v)|\,dv. \tag{4}$$

Если функция $s(u)$ принадлежит классу $|T_0|$, то найдется константа C, зависящая только от δ, μ, $k(v)$, такая, что будет выполнено неравенство

$$\int_E|ds(v)|\leqslant C\int_E|g(v)|\,dv. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы используем вспомогательную функцию $h(t)=3(\sin t/t)^4/2\pi$, где множитель $3/2\pi$ обеспечивает равенство $\int_E h(t)\,dt=1$. Положив $h_\lambda(t)=\lambda h(\lambda t)$, найдем

$$\int_E h_\lambda(t)\,dt=\int_E h(t)\,dt=1,\quad \int_{-\delta}^{\delta}h_\lambda(t)\,dt=\int_{-\delta\lambda}^{\delta\lambda}h(t)\,dt\to 1\quad (\lambda\to+\infty,\ \delta=\text{const}),$$

$$\int_{k\delta}^{\infty} h_\lambda(t)\,dt = \int_{k\lambda\delta}^{\infty} h(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi k^3} \quad (\lambda\delta \geqslant 1, \quad k \geqslant 1),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{j\delta}^{\infty} h_\lambda(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < 1 \quad (\lambda\delta \geqslant 1). \tag{6}$$

По условию теоремы $s(u) \in |T|$. Для заданного $c > 0$ найдем сначала $\varepsilon > 0$ такое, что

$$2\varepsilon \int_E d\psi(v) < \mu, \tag{7}$$

и при фиксированных $\varepsilon > 0$, δ, μ определим λ так, что $\lambda\delta > 1$ и

$$(\mu + 1) \int_{-\delta}^{\delta} h_\lambda(t)\,dt - 1 > 3\mu/4. \tag{8}$$

Легко проверить, что преобразование Фурье $H(x) = \int_E e^{-iux} h(u)\,du = 0$ при $|x| \geqslant 4$, и $H_\lambda(x) = \int_E h_\lambda(u) e^{-iux} du = 0$ при $|x| \geqslant 4\lambda$. Так как по условию теоремы $K(x) \neq 0$ при $|x| \leqslant 4\lambda$, то по известной теореме [2, с. 49] $h_\lambda(u) = \int_E p_\lambda(u-t) k(t)\,dt$, где $\|p_\lambda\| < \infty$. Из условий (2) и (3) следует абсолютная сходимость интеграла (1). Используя также условие $\|p_\lambda\| < \infty$, получим

$$\int_E h_\lambda(v-u)\,ds(u) = \int_E ds(u) \int_E p_\lambda(v-u-t) k(t)\,dt =$$

$$= \int_E p_\lambda(v-t)\,dt \int_E k(t-u)\,ds(u) = \int_E p_\lambda(v-t)\, g(t)\,dt.$$

Также $\left|\int_E h_\lambda(v-u)\,ds(u)\right| \geqslant \left|\int_{v-\delta}^{v+\delta}\right| - \left|\int_{-\infty}^{v-\delta}\right| - \left|\int_{v+\delta}^{\infty}\right|$. При оценке интеграла $\int_{v-\delta}^{v+\delta}$ используем тот факт, что функция $s(u) \in |T|$, и получим

$$\left|\int_{v-\delta}^{v+\delta} h_\lambda(v-u)\,ds(u)\right| \geqslant \int_{v-\delta}^{v+\delta} h_\lambda(v-u)\,\mathrm{Re}\,\{e^{i\theta} ds(u)\} \geqslant$$

$$\geqslant \mu \int_{v-\delta}^{v+\delta} h_\lambda(v-u)\,|ds(u)| - \varepsilon \int_{v-\delta}^{v+\delta} d\psi(u).$$

Сведя все вычисления вместе, придем к неравенству

$$\mu \int_{v-\delta}^{v+\delta} h_\lambda(v-u)\,|ds(u)| \leqslant \varepsilon \int_{v-\delta}^{v+\delta} h_\lambda(v-u)\,d\psi(u) + \left(\int_{-\infty}^{v-\delta} + \int_{v+\delta}^{\infty}\right) \times$$

$$\times h_\lambda(v-u)\,|ds(u)| + \int_E |p_\lambda(v-t)\, g(t)|\,dt. \tag{9}$$

Проинтегрируем это неравенство по отрезку $[-b-\delta, b+\delta]$. Оценим вклад каждого слагаемого отдельно:

$$\int\limits_{-b-\delta}^{b+\delta} dv \int\limits_{v-\delta}^{v+\delta} h_\lambda (v-u) \, | \, ds(u) | \geqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} h_\lambda (t) \, dt \int\limits_{-b}^{b} | \, ds(u) \, |.$$

$$\int\limits_{-b-\delta}^{b+\delta} dv \int\limits_{v-\delta}^{v+\delta} h_\lambda (v-u) \, d\psi(u) \leqslant \int\limits_{E} d\psi(u).$$

$$\int\limits_{-b-\delta}^{b+\delta} dv \int\limits_{-\infty}^{v-\delta} h_\lambda (v-u) \, | \, ds(u) | \leqslant \int\limits_{-\infty}^{-b-2\delta} | \, ds(u) | \int\limits_{-b-\delta-u}^{\infty} h_\lambda(t) \, dt +$$

$$+ \int\limits_{-b-2\delta}^{b} | \, ds(u) | \int\limits_{\delta}^{\infty} h_\lambda(t) \, dt.$$

$$\int\limits_{-b-\delta}^{b+\delta} dv \int\limits_{v+\delta}^{\infty} h_\lambda (v-u) \, | \, ds(u) | \leqslant \int\limits_{b+2\delta}^{\infty} | \, ds(u) | \int\limits_{-\infty}^{b+\delta-u} h_\lambda(t) \, dt +$$

$$+ \int\limits_{-b}^{b+2\delta} | \, ds(u) | \int\limits_{-\infty}^{-\delta} h_\lambda(t) \, dt. \qquad \int\limits_{-b-\delta}^{b+\delta} dv \int\limits_{E} | \, p_\lambda (v-t) \, g(t) \, | \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E} | \, g(t) \, | \, dt \int\limits_{E} | \, p_\lambda (v-t) \, | \, dv = \| g \| \, \| p_\lambda \|.$$

Подставляя все полученные оценки в проинтегрированное по отрезку $[-b-\delta, b+\delta]$ неравенство (9), приведем его к виду

$$\mu \int\limits_{-\delta}^{\delta} h_\lambda(t) \, dt \int\limits_{-b}^{b} | \, ds(u) \, | \leqslant \varepsilon \int\limits_{E} d\psi(u) + \| p_\lambda \| \, \| g \| + \left(\int\limits_{-b-2\delta}^{-b} + \int\limits_{b}^{b+2\delta} \right) | \, ds(u) \, | +$$

$$+ \int\limits_{-b}^{b} | \, ds(u) \, | \left(\int\limits_{\delta}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \right) h_\lambda(t) \, dt + \int\limits_{-\infty}^{-b-2\delta} | \, ds(u) | \int\limits_{-b-\delta-u}^{\infty} h_\lambda(t) \, dt +$$

$$+ \int\limits_{b+2\delta}^{\infty} | \, ds(u) | \int\limits_{-\infty}^{b+\delta-u} h_\lambda(t) \, dt. \tag{10}$$

Но по неравенствам (3) и (6)

$$\int\limits_{-\infty}^{-b-2\delta} | \, ds(u) | \int\limits_{-b-\delta-u}^{\infty} h_\lambda(t) \, dt \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{-b-(k+1)\delta}^{-b-k\delta} | \, ds(u) | \int\limits_{(k-1)\delta}^{\infty} h_\lambda(t) \, dt \leqslant M,$$

и последний член в неравенстве (10) допускает такую же оценку. Окончательно из неравенства (10) получим

$$\left((\mu+1) \int\limits_{-\delta}^{\delta} h_\lambda(t) \, dt - 1 \right) \int\limits_{-b}^{b} | \, ds(u) \, | \leqslant \varepsilon \int\limits_{E} d\psi(u) + \| p_\lambda \| \, \| g \| + 6M.$$

Учитывая неравенство (8) и устремляя b к $+\infty$, убеждаемся, что $\int\limits_{E} | \, ds(u) \, | < \infty$. Это, в частности, обозначает, что $\int\limits_{v}^{v+1} | \, ds(u) | \to 0 \; (| \, v \, | \to \infty)$, т. е. неравенство (3) удается несколько улучшить. Используя эту улучшенную оценку, легко проверить, что при $b \to +\infty$ вклад трех слагаемых в неравенстве (10) стремится к нулю. Учитывая это и еще раз переходя в неравенстве (10) к пределу при $b \to +\infty$, придем к неравенству

$$\left((\mu+1) \int\limits_{-\delta}^{\delta} h_\lambda(t) \, dt - 1 \right) \int\limits_{E} | \, ds(u) \, | \leqslant \varepsilon \int\limits_{E} d\psi(u) + \| p_\lambda \| \, \| g \|.$$

Используя (7), (8), разделим это неравенство на $(\mu+1)\int\limits_{-\delta}^{\delta} h_\lambda(t)\,dt - 1 > 3\mu/4$. Тогда получим неравенство (4) с константой $C \leqslant 2\|p_\lambda\|/\mu$, которая зависит, в конечном счете, только от указанных в теореме 1 параметров.

Если $s(u)$ принадлежит классу $|T_0|$, то в предыдущих вычислениях член с $\int d\psi(u)$ исчезает, и приходим к неравенству (5). Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 1 касается преобразований с каноническим ядром $k(v-u)$. Часто приходится иметь дело с преобразованием $g_1(v) = \int\limits_E k_1(v, u)\,ds(u)$, ядро которого $k_1(v, u)$ не является каноническим, но в некотором смысле приближается к каноническому ядру $k(v-u)$. Так как

$$\int\limits_E \left| g_1(v) - \int\limits_E k(v-u)\,ds(u) \right| dv \leqslant \int\limits_E dv \int\limits_E |k_1(v,u) - k(v-u)|\,|ds(u)| =$$

$$= \int\limits_E |ds(u)| \int\limits_E |k_1(v,u) - k(v-u)|\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_n^{n+1} |ds(u)| \max_{n\leqslant u\leqslant n+1} \int\limits_E |k_1(v,u) - k(v-u)|\,dv,$$

то теорема I может быть применена к таким ядрам $k_1(v, u)$, для которых последнее выражение предыдущего неравенства меньше ∞. Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \max_{n\leqslant u\leqslant n+1} \int\limits_E |k_1(v,u) - k(v-u)|\,dv < \infty.$$

Но это условие весьма жесткое. Оно, например, исключает метод суммирования Бореля. Поэтому общая тауберова теорема для абсолютного суммирования не столь эффективна, как соответствующий результат для обычного суммирования [2, с. 72], в котором требуется менее тесное приближение ядра $k_1(v, u)$ к канонической форме $k(v-u)$.

Применим полученный результат к методу абсолютного суммирования Абеля. Пусть дана последовательность чисел $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11}$$

называется (A, λ_n)-суммируемым, если функция $g(x) = \sum\limits_n a_n x^{\lambda_n}$ определена при $0 < x < 1$ и имеет предел при $x \to 1$-, и ряд (11) называется $|A, \lambda_n|$-суммируемым, если $\int\limits_0^1 |g'(x)|\,dx < \infty$. При $\lambda_n = n$ получаем обычные (A)-и $|A|$-методы суммирования Абеля. Ясно, что из $|A, \lambda_n|$-суммируемости следует (A, λ_n)-суммируемость.

Введем функцию $s(y) = \Sigma_{\lambda_n < y} a_n$ и с помощью подстановок $y = e^u$, $x = \exp(-e^{-v})$ условие $|A, \lambda_n|$-суммируемости ряда (11) запишем в виде $\int\limits_0^1 |g'(x)|\,dx = \int\limits_E |g_1(v)|\,dv < \infty$, где

$$g_1(v) = \{g(x)\}'_v = \left\{\int\limits_0^\infty x^y ds(y)\right\}'_v = \int\limits_0^\infty y x^{y-1} x'_v ds(y) = \int\limits_E \exp(-e^{u-v})\, e^{u-v} ds(e^u),$$

т. е.

$$g_1(v)=\int_E k(v-u)\,ds(e^u),\quad k(u)=\exp(-e^{-u})\,e^{-u}.$$

Проверим, что ядро $k(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Условие (2), очевидно, выполнено, а преобразование Фурье $K(x)=\int_E e^{-iux}k(u)\,du=$ $=\int_0^\infty t^{ix}e^{-t}dt=\Gamma(1+ix)\neq 0$ для $x\in E$. Теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 2. *Предположим, что функция $s(e^u)$, соответствующая ряду* (11), *принадлежит классу $|T|$ и*

$$\sum_{\lambda_n<\lambda_j<2\lambda_n}|a_j|\leqslant M\quad(n=1,2,\ldots).\tag{12}$$

Тогда из $|A,\lambda_n|$-суммируемости ряда (11) *вытекает его абсолютная сходимость. Если же функция $s(e^u)$ принадлежит также классу $|T_0|$, то найдется константа C, зависящая только от δ и μ, такая, что будет выполнено неравенство*

$$\sum_n|a_n|\leqslant C\int_0^1|g'(x)|\,dx.\tag{13}$$

Следствие 1. *Если последовательность чисел (λ_n) удовлетворяет условию лакунарности $\lambda_{n+1}/\lambda_n\geqslant\alpha>1$ и ряд* (11) *суммируется $|A,\lambda_n|$-методом, то справедливо неравенство* (13) *с константой, зависящей только от α.*

Следствие 2. *Пусть последовательности чисел (λ_n), (c_n) удовлетворяют условиям: $0<c'\leqslant c_n$, $\lambda_{n+1}\leqslant c''\lambda_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Если $\sum_n|\Delta(c_na_n\lambda_n/\Delta\lambda_n)|<\infty$, где $\Delta\lambda_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n$, то из суммируемости ряда* (11) *$|A,\lambda_n|$-методом вытекает абсолютная сходимость этого ряда.*

Следствие 1 получено в [3, §3], минимальность длины лакун исследована в [4]. При дополнительных предположениях $c_n=1$, $\lambda_n=n$ следствие 2 установлено в [5], а при $c_n=1$ и условии $\Delta\lambda_n\leqslant\Delta\lambda_{n-1}\leqslant 1$ — в [6]. Докажем следствия 1 и 2.

Если последовательность (λ_n) лакунарна, то при достаточно малом $\delta>0$ отрезок $[v-\delta,v+\delta]$ содержит не более одной точки, в которой функция $s(e^u)$ имеет скачок. Отсюда ясно, что $s(e^u)$ принадлежит классу $|T_0|$ с $\mu=1$, δ, зависящем только от α. Из (A,λ_n)-суммируемости и лакунарности последовательности (λ_n) следует [7, с. 218], ограниченность членов ряда (11), что, ввиду лакунарности, равносильно условию (12). По теореме 2 выполнено неравенство (13), и следствие 1 доказано.

Для доказательства следствия 2 введем обозначение $\Delta(a_nc_n\lambda_n/\Delta\lambda_n)=$ $=b_n$, $\Sigma|b_n|<\infty$. При $k>n$ $a_kc_k\lambda_k/\Delta\lambda_k=b_{k-1}+b_{k-2}+\ldots+b_n+a_nc_n\lambda_n/\Delta\lambda_n$, откуда

$$a_k=\frac{\Delta\lambda_k(b_{k-1}+b_{k-2}+\ldots+b_n)}{\lambda_kc_k}+a_n\frac{c_n\lambda_n\Delta\lambda_k}{c_k\lambda_k\Delta\lambda_n}.\tag{14}$$

Выберем $\theta(n)=-\arg a_n$, $\beta_k=\dfrac{\Delta\lambda_k}{c'\lambda_k}\sum\limits_{\lambda_k/2<\lambda_j<\lambda_k}|b_j|$. Тогда из неравенства (14) найдем, что

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta(n)}a_k\}\geqslant|a_k|-2\beta_k\quad(\lambda_n\leqslant\lambda_k<2\lambda_n).\tag{15}$$

Но

$$\sum_k \beta_k = \frac{1}{c'} \sum_k \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_k} \sum_{\frac{1}{2}\lambda_k < \lambda_j < \lambda_k} |b_j| = \frac{1}{c'} \sum_j |b_j| \sum_{\lambda_j < \lambda_k < 2\lambda_j} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_k}.$$

Найдя k' из условия $\lambda_{k'} < 2\lambda_j \leqslant \lambda_{k'+1}$, имеем

$$\sum_{\lambda_j < \lambda_k < 2\lambda_j} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_k} \leqslant \frac{\lambda_{k'+1} - \lambda_{j+1}}{\lambda_j} \leqslant \frac{c''\lambda_{k'}}{\lambda_j} \leqslant 2c'',$$

так что $\Sigma\beta_k < \infty$. Теперь видно, что неравенство (15) после экспоненциальной замены переменных обеспечит принадлежность функции $s(e^u)$ классу $|T|$ с фиксированным ε, равным, например, единице.

Для применения теоремы 2 еще необходимо доказать неравенство (12). Пусть x—достаточно большое число, а номер n найден из условия $\lambda_{n-1} < 3x/4 \leqslant \lambda_n$. Используя еще раз равенство (14) и неравенство $\Sigma\beta_k < \infty$, увидим, что значения функции $s(y)$ при возрастании y от $3x/4$ до $4x/3$ монотонно двигаются с точностью до бесконечно малых по лучу, выходящему из точки $s(3x/4+)$ и имеющему угол наклона к действительной оси, равный $\arg a_n$. Всегда можно найти направление $\theta'(x)$ такое, что для всех y, лежащих на каком-то одном из отрезков $[3x/4, x]$ или $[x, 4x/3]$ будет выполнено неравенство $\operatorname{Re}\{e^{i\theta'(x)}s(y)\} \geqslant \mu|s(x)| - 1$, где $\mu > 0$ и не зависит от x. После экспоненциальной замены переменных это обеспечивает принадлежность функции $s(e^u)$ питтовскому (см. [2, с. 8]) классу T с фиксированным $\varepsilon = 1$. Более того, семейство функций $s_\sigma(e^u) = \Sigma_{\ln\lambda_n < u} a_n \times \exp(-\sigma\lambda_n)$ равномерно по $\sigma \geqslant 0$ принадлежит питтовскому классу с фиксированным $\varepsilon = 1$. Тогда из (A, λ_n)-суммируемости ряда (17) следует ограниченность функции $s(e^u)$ [2, с. 35]. Ограниченность функции $s(e^u)$ и принадлежность ее классу $|T|$ обеспечивают выполнение неравенства (12), так как

$$\sum_{\lambda_n < \lambda_j < 2\lambda_n} |a_j| = O\left(\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta(n)} \sum_{\lambda_n < \lambda_j < 2\lambda_n} a_j\right\} + o(1)\right) =$$

$$= O(s(2\lambda_n) - s(\lambda_n+) = O(1).$$

По теореме 2, $\Sigma|a_n| < \infty$, и следствие 2 доказано.

Результаты, аналогичные предыдущим, можно получить для L_p-нормы, $p > 1$. Без доказательства они изложены в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельник В. И. Общие тауберовы теоремы для абсолютного суммирования.— Изв. вузов. Математика, 1979, № 11, с. 84—87.
2. Pitt H. R. Tauberian theorems: London: Oxford Univ. Press, 1958.— 174 p.
3. Zygmund A. On certain integrals.— Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **55**, N 2, p. 170—204.
4. Гейсберг С. Лакунарные тауберовы теоремы для абсолютного суммирования.— Уч. зап. Тартуского ун-та, 1961, **102**, с. 52—77.
5. Huslop J. M. A tauberian theorem for absolute summability.— J. London Math. Soc., 1937, **12**, part 3, N 47, p. 176—180.
6. Слепенчук К. М. Теоремы тауберова типа для абсолютной суммируемости методами Абеля.— Изв. вузов. Математика, 1965, №. 6, с. 135—139.
7. Харди Г. Расходящиеся ряды.— М., Изд.-во иностр. лит., 1951.— 504 с.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию
31.I 1979 г.