УДК 519.41/47

П. П. Барышовец

Конечные неразрешимые группы, в которых подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта

Строение конечной ненильпотентной группы G в значительной степени зависит от насыщенности G нильпотентными подгруппами и подгруппами Шмидта, т. е. минимальными ненильпотентными подгруппами. Исследованием такой зависимости после выхода в свет известной работы О. Ю. Шмидта [1] занимались в разное время многие авторы (см., например, [2—4] и др.). В этом направлении в работе [5] получено описание конечных ненильпотентных групп с нильпотентными подгруппами непримарного индекса. Оказалось, в частности, что такие группы разрешимы, а их порядок делится не более чем на три различных простых числа.

В настоящей работе рассматриваются конечные ненильпотентные группы, у которых все подгруппы непримарного индекса либо нильпотентны, либо группы Шмидта. Нетрудно убедиться, что такие группы не обязательно разрешимы. Простейшим примером является здесь знакопеременная группа степени 5. Описание конечных неразрешимых групп, удовлетворяющих указанному условию, дает приводимая ниже теорема. Ее доказательству и посвящена настоящая работа.

Теорема. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, в которой все подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, 5)$, $PSL(2,7)$, $SL(2, 5)$ и $SL(2, 7)$.*

Пусть G — произвольная ненильпотентная конечная группа, обладающая свойством: все подгруппы непримарного индекса из G нильпотентны или являются группами Шмидта. Тогда все ненильпотентные подгруппы и ненильпотентные фактор-группы группы G обладают тем же свойством. Ниже будем использовать этот факт без специальных оговорок.

Лемма 1. *Пусть G — конечная минимальная неразрешимая группа, в которой все подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта. Тогда $G/R(G) \simeq PSL(2,5)$ или $G/R(G) \simeq PSL(2,7)$. (Здесь и ниже $R(G)$ — максимальный разрешимый нормальный делитель неразрешимой конечной группы G).*

Доказательство этой леммы в основном сводится к просмотру подгрупп у групп, указанных в известной теореме Томпсона [6, с. 190]. При этом используются результаты работ [7 и 8].

Лемма 2. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, в которой все подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта. Тогда $R(G)$ — циклическая 2-группа.*

Доказательство. По одному результату работы [9] группа $G/R(G)$ содержит подгруппу Шмидта T^* порядка $2^\alpha q$ с циклической силовской 2-подгруппой. Ясно, что индекс $|G/R(G) : T|$ непримарен. Отсюда вытекает, что проообраз T подгруппы T^* в группе G должен быть группой Шмидта. Последнее возможно лишь при указанном в лемме условии. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть G — минимальная неразрешимая конечная группа. Если все подгруппы непримарного индекса группы G нильпотентны или являются группами Шмидта, то порядок G равен $2^{\alpha}\cdot 3\cdot 5$ или $2^{\alpha}\cdot 3\cdot 7$, где $\alpha = 2$.*

Л е м м а 3. [10]. *Если $G/D \simeq PSL\,(2, p)$, где $|D| = 2$, то либо $G \simeq SL\,(2, p)$, либо $G = D \times H$, где $H \simeq G/D$.*

Л е м м а 4. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, в которой все подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта. Если группа $G/R\,(G)$ изоморфна $PSL\,(2,5)$ или $PSL\,(2,7)$, то G изоморфна одной из следующих групп: $PSL\,(2,5)$, $PSL\,(2,7)$, $SL\,(2,5)$, $SL\,(2, 7)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $R\,(G) = 1$, то лемма очевидна. Если $R\,(G) \neq 1$, то в силу леммы 2 $R(G)$—циклическая 2-группа. При $|R\,(G)| = 2$ достаточно воспользоваться леммой 3 и условием доказываемой леммы. Предположим, что $|R\,(G)| > 2$. Тогда, не теряя общности, можно считать, что

$$|R\,(G)| = 4. \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая.

1. $G/R\,(G) \simeq PSL\,(2,5)$. Тогда ввиду (1) порядок силовской 2-подгруппы равен 16. Покажем сначала, что G_2 — метациклическая группа.

В самом деле, пусть D^* — подгруппа порядка 6 в фактор-группе $G/R\,(G) = \bar{G}$. Так как индекс $|\bar{G} : D^*|$ непримарен и D^* — ненильпотентная группа, то прообраз D группы D^* в группе G является в силу условия доказываемой леммы группой Шмидта. Отсюда следует, что силовская подгруппа D_2 группы D циклическая. Так как $|G : D| = |\bar{G} : D^*| = 2\cdot 5$, то она содержит циклическую подгруппу индекса 2 и поэтому метациклична.

Если T^* — подгруппа порядка 12 в группе $\bar{G}$, а T—ее полный прообраз в группе G, то $T = G_2 \rtimes G_3$, где G_3—некоторая силовская 3-подгруппа группы G, причем $[G_2, G_3] \neq 1$. Далее $R\,(G) < G_2$, и поскольку $R\,(G)$ — циклическая группа, то $[R\,(G), G_3] = 1$. Поэтому в силу леммы 1 [11] G_2—группа кватернионов порядка 8. Получили противоречие с соотношением $|G_2| = 16$.

2. $G/R\,(G) \simeq PSL\,(2,7)$. Тогда ввиду (1) $|G_2| = 32$ и по лемме 5 [12] $R\,(G) \subseteq Z\,(G)$. Если T^* — подгруппа порядка 12 группы $G/R\,(G)$, а T — ее прообраз в G, то $T = T_2 \rtimes T_3$, где T_2 и T_3 — силовские 2- и 3-подгруппы T соответственно. При этом $|T_2| = 16$ и $|z\,(T)| = 4$. Так как индекс $|G : T|$ непримарен, то T — группа Шмидта. Но тогда T_2 — неабелева группа и $T_2' = Z\,(T_2)$. Противоречие, так как $|T_2'| = 2$ ввиду соотношения $|T_2 : Z\,(T_2)| = 4$. Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, у которой все подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта. Тогда $G/R\,(G)$ — простая группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R\,(G) = 1$ и K — минимальный нормальный делитель группы G. Подгруппа K, очевидно, простая. Предположим, что $K \neq G$. Если H — минимальная неразрешимая подгруппа группы K, то ввиду следствия 1 возможны два случая.

1. $|H| = 2^{\alpha}\cdot 3\cdot 7$. Тогда $H/R\,(H) \simeq PSL\,(2,7)$ согласно лемме 1. Если D^* — подгруппа, изоморфная S_4 в фактор-группе $H/R\,(H)$, то ее полный прообраз D в подгруппе H имеет в G (а, значит, и в H) примарный индекс. Так как по лемме 2$R\,(H)$ — 2-группа, то $|G : D| = 7^{\beta}$. Следовательно, силовская 3-подгруппа G_3 группы G имеет порядок 3 и $|G| = 2^{\alpha}\cdot 3\cdot 7^{\beta}$. Поскольку K — простая группа, то по теореме I [7] $K \simeq PSL\,(2,7)$. Рассмотрим нормализатор N подгруппы G_3 в группе G. В силу теоремы 7.6 [6, гл.1] $N \not\subseteq K$ и $N \cap K$ ненильпотентная группа. Так как $|G : K| = 7^{\beta}$ и $N \cap K = G_3 \rtimes \langle i \rangle$, где $i^2 = 1$, то в дополнении M к подгруппе G_3 в N можно взять подгруппу S порядка 2.7. Тогда подгруппа G_3S порядка 2.3.7 в силу условия леммы должна иметь в G примарный индекс. Поскольку силовские

подгруппы группы G по числам 2 и 7 имеют непростые порядки, то получили противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2. $|H| = 2^{\alpha}\cdot 3\cdot 5$. Тогда согласно лемме $H/R(H) \simeq PSL(2,5)$. Покажем, что

$$K \simeq PSL(2,5). \tag{2}$$

В самом деле, индекс $|G:H|$ примарен. Пусть $|G:H| = r^{\gamma}$. Если $r = 5$, то $|G| = 2^{\alpha}\cdot 3\cdot 5^{\gamma+1}$ и потому ввиду простоты группы K из теоремы I [7] следует (2). Аналогично рассматривается случай $r = 2$.

Пусть r — простое число, отличное от 2 и 5. Тогда порядок силовской 5-подгруппы G_5 группы G равен 5 и по теореме 7.6 [6, гл. I] $N_G(G_5) \not\subseteq K$. Пересечение $N_G(G_5) \cap K$ является ненильпотентной группой, причем индекс $|G:N_G(G_5) \cap K|$, очевидно, непримарен. Следовательно, $N_G(G_5) \cap K$ — группа Шмидта и потому $|N_G(G_5) \cap K| = 2^{\sigma}\cdot 5$, $\sigma \geqslant 1$. Отсюда вытекает, что нормализатор $N_G(G_5)$ содержит ненильпотентную подгруппу L порядка $2^{\sigma}\cdot 5\cdot r$. Силовская 2-подгруппа L_2 группы L циклическая и поэтому $|G:L| = 2^{\delta}$ и $r^2 \nmid |G|$. Так как $|G:H| = r$, то $H = K$. Применяя к группе теорему I [7] получаем (2). Итак, изоморфизм (2) доказан.

Так как индекс подгруппы всех внутренних автоморфизмов в группе всех автоморфизмов группы $PSL(2,p)$, $p > 3$, равен 2 (см., например, [13, с. 462]), то из соотношений $R(G) = 1$, $K \lhd G$ и (2) следует, что индекс $|G:K|$ — степень числа r, равного 2,3 или 5. Если $r = 2$, то нормализатор силовской 3-подгруппы G_3 группы G в G содержит ненильпотентную подгруппу Q порядка $2^2\cdot 3$, не являющуюся группой Шмидта. Так как индекс $|G:Q|$ делится, очевидно, на 10, то получили противоречие. Аналогично рассматриваются случаи: $r = 3$ и $r = 5$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Простая группа G, у которой все подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта, изоморфна $PSL(2,5)$ или $PSL(2,7)$.*

Доказательство. Минимальная неразрешимая подгруппа H группы G имеет в G примарный индекс r^{γ}, и порядок подгруппы H ввиду леммы 4 равен $2^{\alpha}\cdot 3\cdot 5$ или $2^{\alpha}\cdot 3\cdot 7$, где $2 \leqslant \alpha \leqslant 4$.

1. Если $|H| = 2^{\alpha}\cdot 3\cdot 7$, то H содержит, как нетрудно убедиться, недисперсивную холловскую подгруппу порядка $2^{\alpha}\cdot 3$. Следовательно, $|G:H| = 7^{\beta}$, $\beta \geqslant 1$ и $|G| = 2^{\alpha}\cdot 3\cdot 7^{\beta}$. Применяя теорему I [7], получаем, что $G \simeq PSL(2,7)$.

2. Пусть $|H| = 2^{\alpha}\cdot 3\cdot 5$, $\alpha \geqslant 2$. Если $r = 2$ или 5, $\gamma \geqslant 1$, то снова применяем теорему I [7]. Предположим, что $r = 3$ и силовская 3-подгруппа G_3 группы G нециклическая. Тогда $|G| = 2^{\alpha}\cdot 3^{\gamma+1}\cdot 5$ и в силу результатов статьи [14] группа G изоморфна A_6 или простой группе $O_3(5)$ порядка 25920. Нетрудно убедиться, что обе группы неудовлетворяют условию леммы.

Пусть, наконец, $r \neq 2, 3, 5$. Тогда ввиду простоты G силовская 2-подгруппа G_2 из G — элементарная абелева группа порядка 4 (см. [6, с. 624]). По теореме Горенштейна — Уолтера (см. [13, с. 462]) G изоморфна группе A_7 или $PSL(2,p^n)$, $p > 2$, $p^n > 3$. Если $G \simeq A_7$, то противоречие получаем аналогично случаю $G \simeq A_6$. Если же $G \simeq PSL(2,p^n)$, $p > 2$, $p^n > 3$, то нетрудно убедиться, что $p^n = 5$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость условия теоремы следует из лемм 1 — 6. Достаточность проверяется непосредственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные.— Мат. сб., 1924, 21, с. 366—372.
2. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1964.— 158 с.

3. J a n k o Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweimaximalen Untergruppen.— Math. Z., 1962, **79**, c. 422—424.
4. Б е л о н о г о в В. А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами.— Мат. заметки, 1968, **3**, № 1, с. 21—32.
5. Л е в и щ е н к о С. С. Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса.— В кн.: Некоторые вопросы теории групп. Киев: Институт математики АН УССР, 1975, с. 173—196.
6. H u p p e r t B. Endliche Gruppen I, Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1967.— 793 S.
7. H e r z o g M. On groups of order $2^{\alpha}3^{\beta}p^{\gamma}$ with a cyclic Sylow 3-subgroups.—Proc. of the American Math. Soc., 1970, **24**, N 1, p. 116—118.
8. S u z u k i M. On class of doubly transitive groups I, II.—Ann. Math., 1962, **75**, p. 105—145; 1964, **79**, p. 514—589.
9. Б е р к о в и ч Я. Г. Строение группы и строение ее подгрупп. ДАН СССР, 1968, **179**, с. 13—16.
10. S c h u r J. Untersuchungen über die Doorstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen.— J. reine und angew. Math., 1907, **132**, p. 85—137.
11. М а з у р о в В. Д. О конечных группах с метациклическими силовскими 2-подгруппами.— Сиб. мат. журн., 1967, 8, № 5, с. 966—982.
12. Л е л ь ч у к М. П. О неразрешимых группах, близких по строению к разрешимым.— В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966, с. 55—71.
13. G o r e n s t e i n D. Finite groups, Harper and Row.— New York, 1968.— 528 p.
14. B r a u e r R. On simple groups of order $5 \cdot 3^{\alpha} \cdot 2^{\beta}$.— Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, p. 900—903.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
19.VI 1978 г.