УДК 518:517.944/.947

А. Н. Витюк

Разрешимость и разностный метод решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа

Разрешимость задачи Гурса для уравнения $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$ исследовалась многими авторами. Обзор и библиография основных работ по данному вопросу имеется в [1]. Исследована также применимость одношаговых [2, 3] и многошаговых [4, 5] методов для численного решения этой задачи.

В данной статье речь пойдет о разрешимости и разностном методе приближенного решения краевой задачи

$$z_{xy}^{(i)} = f^{(i)}(x, y, z^{(1)}, \dots z^{(n)}, z_x^{(1)}, \dots, z_x^{(n)}, z_y^{(1)}, \dots, z_y^{(n)}), (x, y) \in [a, b] \times$$

$$\times [c, d], i = \overline{1, n},$$

$$z^{(m)}(x, c) = \varphi_m(x), z^{(m)}(a, y) = \psi_m(y), \varphi_m(a) = \psi_m(c), m = \overline{1, k},$$

$$z^{(j)}(x, d) = \varphi_j(x), z^{(j)}(b, y) = \psi_j(y), \varphi_j(b) = \psi_j(d), \quad j = \overline{m+1, n}, \ a \leqslant x \leqslant b,$$

$$c \leqslant y \leqslant d.$$

К этой задаче сводится, например, задача

$$z_{xxyy} = A(x, y) z + f(x, y), (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \ z(x, c) = z(a, y) =$$

$$= z_{xy}(x, d) = z_{xy}(b, y) = 0, \ a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d,$$

для которой в [6] построена функция Грина.

Рассмотрим случай $n = 2$.

1. Будем говорить, что $u \in C^*(D)$, $D = I \times J$, $I = [0, a]$, $J = [0, b]$, если:

1) $u(x, y)$ непрерывна в D, абсолютно непрерывна по x для $\forall y \in J$ и абсолютно непрерывна по y для $\forall x \in I$;

2) $u_x(x, y)$ абсолютно непрерывна по y для $\forall x \in I$;

3) $u_y(x, y)$ абсолютно непрерывна по x для $\forall y \in J$;

4) $u_{xy}(x, y)$ интегрируемая по Лебегу.

Запись $u \in C(D)$ означает далее, что u, u_x, u_y, u_{xy} непрерывны при $(x, y) \in D$.

Под R^m понимаем действительное евклидово пространство размерности m.

Рассмотрим краевую задачу

$$u_{xy} = f^{(1)}[u, v]; \quad v_{xy} = f^{(2)}[u, v], \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u(0, y) = 0, \tag{2}$$

$$v(x, b) = v(a, y) = 0, \ x \in I, \ y \in J, \tag{3}$$

где $f^{(i)}[u, v] \equiv f^{(i)}(x, y, u, u_x, u_y, v, v_x, v_y)$, $i=1, 2$.

Приведем условия, достаточные для существования единственного решения задачи (1) — (3), принадлежащего $C(D)$. Обозначим их (H). Пусть в области $G = D \times R^6$ функции $f^{(i)}$ непрерывны по x, y, удовлетворяют условию Липшица $|f^{(i)}(x, y, z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3) - f^{(i)}(x, y, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3)| \leqslant \leqslant \sum_{j=1}^{3} A_j(|z_j - r_j| + |w_j - s_j|)$, причем $2(A_1 ab + A_2 b + A_3 a) < 1$.

Лемма 1. *Пусть $w, r \in C^*(D)$, удовлетворяют, соответственно, краевым условиям* (2), (3) *и почти всюду в* D $|w_{xy}| \leqslant P[w, r] + \varphi_1$, $|r_{xy}| \leqslant \leqslant P[w, r] + \varphi_2$, *где* $P[w, r] \equiv A_1(|w| + |r|) + A_2(|w_x| + |r_x|) + A_3(|w_y| + + |r_y|)$, *а функции* $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2$, *непрерывны и неотрицательны в* D. *Тогда**

$$(|w|, |w_x|, |w_y|) \leqslant (u, u_x, u_y), \ (|r|, |r_x|, |r_y|) \leqslant (v, |v_x|, |v_y|), \tag{4}$$

а u, v — *решение задачи* (1) — (3) *при* $f^{(i)}[u, v] = P[u, v] + \varphi_i$, $i = 1, 2$.

Введем следующие обозначения:

$$h_n = a/n, \ l_m = b/m, \ x_i^{(n)} = ih_n, \ y_j^{(m)} = jl_m, \ r_{ij}^{(n,m)} = r(x_i^{(n)}, y_j^{(m)}), \ \partial_x r_{ij} =$$

$$= (r_{i+1,j} - r_{ij})/h, \ \partial_y r_{ij} = (r_{i,j+1} - r_{ij})/l, \ \delta_x r_{ij} = (r_{ij} - r_{i-1,j})/h, \ \delta_y r_{ij} =$$

$$= (r_{ij} - r_{i,j-1})/l, \ \partial_{xy} r_{ij} = (r_{i+1,j+1} - r_{i,j+1} - r_{i+1,j} + r_{ij})/hl, \ \delta_{xy} r_{ij} = (r_{ij} -$$

$$- r_{i,j-1} - r_{i-1,j} + r_{i-1,j-i})/hl, \ f_{ij}^{(1)}[u, v] = f^{(1)}(x_i, y_j, u_{ij}, \partial_x u_{ij}, \partial_y u_{ij}, v_{ij}, \partial_x v_{ij},$$

$$\partial_y v_{ij}), \ f_{ij}^{(2)}[u, v] = f^{(2)}(x_i, y_j, u_{ij}, \delta_x u_{ij}, \delta_y u_{ij}, v_{ij}, \delta_x v_{ij}, \delta_y v_{ij}),$$

$$D_{ij} = [x_i \leqslant x < x_{i+1}, y_j \leqslant y < y_{j+1}], \ \tilde{D}_{ij} = [x_{i-1} < x \leqslant x_i,$$

$$y_{j-1} < y \leqslant y_j], \ \max_{G} |f^{(t)}| \leqslant M, \ t = 1, 2, \ S = \max(Ma, Mb, M).$$

Аппроксимация дифференциальных уравнений (1) и краевых условий (2), (3) приводит к системе нелинейных уравнений

$$\partial_{xy} u_{ij} = f_{ij}^{(1)}[u, v], \ i = \overline{0, n-1}, \ j = \overline{0, m-1} \tag{5}$$

$$\partial_{xy} v_{sq} = f_{sq}^{(2)}[u, v], \ s = \overline{n, 1}, \ q = \overline{m, 1}, \tag{6}$$

---

* Соотношение (4) (и далее подобные соотношения) выполняется покомпонентно.

$$u_{i0}=u_{0j}=0,\ \ i=\overline{0,n},\ \ j=\overline{0,m},\tag{7}$$

$$v_{sm}=v_{nq}=0,\ \ s=\overline{0,n},\ \ q=\overline{0,m}.\tag{8}$$

Теорема 1. *При выполнении условий* (H) *система уравнений* (5) — (8) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Систему (5) — (8) будем решать методом последовательных приближений и N-е приближение к ее решению обозначим $u_{ij}^{(N)}$, $v_{ij}^{(N)}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $N=0, 1, 2, \ldots$. Зададим $u_{ij}^{(0)}$, $v_{ij}^{(0)}$ так, чтобы выполнялись соотношения (7), (8), а в остальном произвольно. Последовательно для $i=0, 1, \ldots, n-1$ из уравнений $\partial_{xy}u_{ij}^{(1)}=f^{(1)}[u^{(0)}, v^{(0)}]$ находим $u_{ij}^{(1)}$, $j=\overline{0,m-1}$, а из уравнений $\delta_{xy}v_{ij}^{(1)}=f^{(2)}[u^{(0)}, v^{(0)}]$ для каждого $i=n, n-1, \ldots, 1,$ — $v_{ij}^{(1)}$, $j=m, m-1, \ldots, 1$ и т. д.

Определим функции $u^{(N)}(x, y)$, $v^{(N)}(x, y)$, полагая:

$$\begin{aligned}u^{(N)}(x, y)&=u_{ij}^{(N)}+(x-x_i)\,\partial_x u_{ij}^{(N)}+(y-y_j)\,\partial_y u_{ij}^{(N)}+(x-x_i)\times\\&\times(y-y_j)\,\partial_{xy}u_{ij}^{(N)},\ \text{ если }\ (x, y)\in D_{ij},\\ v^{(N)}(x, y)&=v_{ij}^{(N)}+(x-x_i)\,\delta_x v_{ij}^{(N)}+(y-y_j)\,\delta_y v_{ij}^{(N)}+(x-x_i)\times\\&\times(y-y_j)\,\delta_{xy}v_{ij}^{(N)},\ \text{ если }\ (x, y)\in \widetilde{D}_{ij}.\end{aligned}\tag{9}$$

Доопределим функции $u^{(N)}$, $u_x^{(N)}$, $u_y^{(N)}$, $u_{xy}^{(N)}$ при $y=b$, $x\in I$ и $x=a$, $y\in J$, полагая:

$$u^{(N)}(x, b)=u_{im}+(x-x_i)\,\partial_x u_{im},\ \ u_y^{(N)}(x, b)=\partial_y u_{i,m-1}+(x-x_i)\,\partial_{xy}u_{i,m-1},$$

если $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$ и $u^{(N)}(x, b)=\partial_x u_{im}$; $u_{xy}^{(N)}(x, b)=\partial_{xy}u_{i,m-1}$, если $x_i\leqslant x<$
$<x_{i+1}$, $i=\overline{0, n-1}$; $u^{(N)}(a, y)=u_{nj}+(y-y_j)\,\partial_y u_{nj}$, $u_x^{(N)}(a, y)=\partial_x u_{n-1,j}+$
$+(y-y_j)\,\partial_{xy}u_{n-1,j}$, если $y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1}$ и $u^{(N)}(a, y)=\delta_y u_{nj}$; $u_{xy}(a, y)=$
$=\partial_{xy}u_{n-1,j}$, если $y_j\leqslant y<y_{j+1}$, $j=\overline{0, m-1}$.

Аналогично доопределим $v^{(N)}$, $v_x^{(N)}$, $v_y^{(N)}$, $v_{xy}^{(N)}$ при $x=0$, $y\in J$ и $y=0$, $x\in I$. Так, определенные функции $u^{(N)}$, $v^{(N)}$ с учетом их доопределения принадлежат классу $C^*(D)$. Используя лемму 1 и индукцию по N, можно показать, что равномерно в D при $N\to\infty$ $u^{(N)}\to\gamma$, $v^{(N)}\to\lambda$. А так как $u^{(N)}(x_i, y_j)=u_{ij}^{(N)}$, $v^{(N)}(x_i, y_j)=v_{ij}^{(N)}$, то очевидно, что при $N\to\infty$ $u_{ij}^{(N)}\to\gamma(x_i, y_j)$, $\partial_x u_{ij}^{(N)}\to\partial_x\gamma(x_i, y_j)$ и т. д., а также, что $\gamma(x_i, y_j)$, $\lambda(x_i, y_j)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0, m}$ — решение системы (5) — (8).

Единственность. Пусть α_{ij}, β_{ij}, $i=\overline{0, n}$, $j=\overline{0, m}$ — другое решение системы (5) — (8). Подобно доказательству существования решения можно доказать, что $u_{ij}^{(N)}\to\alpha_{ij}$, $v_{ij}^{(N)}\to\beta_{ij}$ при $N\to\infty$.

2. Дополнительно к условиям (H) предположим, что $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ удовлетворяют условию Липшица по x и y.

По значениям $u_{ij}^{(n,m)}$, $v_{ij}^{(n,m)}$, $i=\overline{0, n}$, $j=\overline{0, m}$, являющимся решением системы (5) — (8), аналогично (9) построим функции $u^{(n,m)}(x, y)$, $v^{(n,m)}(x, y)$.

Лемма 2. *Для* $\forall y\in(0, b]\,|\,u_x^{(n,m)}(x_i+0, y)-u_x^{(n,m)}(x_i-0, y)|=O(h)$, $i=\overline{1, n-1}$, *а для* $\forall x\in(0, a]\,|\,u_y^{(n,m)}(x, y_j+0)-u_y^{(n,m)}(x, y_j-0)\,|=O(l)$, $j=\overline{1, m-1}$.

Такие же соотношения имеют место и для $v_x^{(n,m)}$, $v_y^{(n,m)}$.

Теорема 2. *Для* $(x, y) \in D$ *и любых* $p \geqslant r \geqslant n$, $q \geqslant s \geqslant m$

$$(|w|, |w_x|, |w_y|) \leqslant (\gamma^{(n,m)}, \gamma_x^{(n,m)}, \gamma_y^{(n,m)}),\ w = u^{(p,q)} - u^{(r,s)},\ (|\omega|, |\omega_x|,$$

$$|\omega_y|) \leqslant (\beta^{(n,m)}, |\beta_x^{(n,m)}|, \beta_y^{(n,m)}|),\ \omega = v^{(p,q)} - v^{(r,s)}, \tag{10}$$

где $\gamma^{(n,m)}$, $\beta^{(n,m)}$ — *решение задачи* (1) — (3) *при*

$$f^{(i)}[\gamma^{(n,m)}, \beta^{(n,m)}] = P[\gamma^{(n,m)}, \beta^{(n,m)}] + \theta_{n,m},\ \theta_{n,m} = O(h_n + l_m). \tag{11}$$

Доказательство. Предварительно оценив для $(x, y) \in D_{ij}\, |u^{(n,m)}(x, y) - u_{ij}^{(n,m)}|$, $|u_x^{(n,m)}(x, y) - \partial_x u_{ij}^{(n,m)}|$ и т. д., получаем, что почти всюду в $D\, |w_{xy}| \leqslant P[w, \omega] + \theta_{n,m}$, $|\omega_{xy}| \leqslant P[w, \omega] + \theta_{n,m}$. Отсюда и из леммы 1, примененной к задаче (1) — (3) с правой частью (11), следует (10).

Теорема 3. *Последовательности* $\{u^{(n,m)}(x, y)\}$, $\{v^{(n,m)}(x, y)\}$ *при* n, $m \to \infty$ *равномерно в* D *сходятся к решению краевой задачи* (1) — (3).

Доказательство. Так как $\theta_{n,m} \to 0$ при $n, m \to \infty$, то легко показать, что равномерно в D $\gamma^{(n,m)}, \beta^{(n,m)} \to 0$ при $n, m \to \infty$. Следовательно, в силу теоремы 2 равномерно в $D\,(u^{(n,m)}, u_x^{(n,m)}, u_y^{(n,m)}) \to (\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$, $(v^{(n,m)}, v_x^{(n,m)}, v_y^{(n,m)}) \to (\psi, \psi_1, \psi_2)$. Используя лемму 2, доказываем, что для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такие δ_1, δ_2, что модуль непрерывности [7] $\omega(\varphi_1; \delta_1, \delta_2) \leqslant \varepsilon$, т. е. функция φ_1 непрерывна в D. Тогда из соотношения $u^{(n,m)}(x, y =$

$$= \int_0^x u_x^{(n,m)}(\xi, y)\, d\xi$$ и теоремы Лебега [8] следует, что $\varphi_1 = \varphi_x$.

Аналогично доказываем, что $\varphi_2 = \psi_y$, $\psi_1 = \psi_x$, $\psi_2 = \psi_y$. А то, что φ, ψ — решение системы (1), можно доказать, например, по такой же схеме, как в соответствующем месте в [9] при доказательстве теоремы о существовании решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kisynski J. Pelczar A. Comparison of solutions and successive a approximations in the theory of the equation $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$.— Warszawa, 1970.— 77 p.
2. Горбунов А. Д., Будак Б. М. О разностном методе решения нелинейной задачи Гурса.— Вестн. МГУ. Сер. мат., астр., физ., хим., 1957, № 4, с. 3—8.
3. Schnerr F. Einschrittverfahren zur numerischen Behandlung des charakteristischen Anfangswertproblems bei einer hyperbolischen Differenz gleichung $z_{xy} = f(x, y, z, p, q)$.— ZAMM, 1977, 57, N 11, S. 659—669.
4. Салихов И. П. Решение задачи Гурса многоточечными разностными методами. 1.— Вестн. МГУ. Сер. мат., 1961, № 4, с. 25—34.
5. Stetter H. J., Tornig W. General multistep finite difference methods for the solution of $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$.—Rend. Circ. Mat. Palermo, 1963, 18, N 1, p. 1—18.
6. Mangeron D. New method for determining polyvibrating phenomena.— Bul. Inst., politeh. Iasi, 1968, 14(18), N 1—2, p. 434—436.
7. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— 624 с.
8. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.— 780 с.
9. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Высшая школа, 1963.— 363 с.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию
24.III 1979 г