УДК 517.512.2

Я. Г. Притула

Признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций ограниченной вариации

Пусть $f(x)$ — равномерная почти периодическая (р. п. п.) функция, спектр которой имеет единственную точку сгущения в бесконечности. Ряд Фурье ее можно записать в следующем симметрическом виде:

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x}$$

$$(\lambda_{-j} = -\lambda_j;\ |A_{-j}| + |A_j| > 0,\ j \neq 0;\ \lambda_j > 0 \text{ и } \lambda_{j+1} > \lambda_j \text{ при } j > 0). \tag{1}$$

Пусть $\omega(\delta; f) = \sup\limits_{x, |h| \leqslant \delta} |f(x+h) - f(x)|$ и $\omega_p(\delta; f) = \sup\limits_{|h| \leqslant \delta} [M\{|f(x+h) - f(x)|^p\}]^{1/p}$, где $M\{g(x)\} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} g(x)\, dx$.

Рассмотрим функцию $f(x)$ на интервале $[a, b]$. Разобьем интервал на части $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Точную верхнюю грань сумм $\sum\limits_{j=0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|^r$ при всевозможных разбиениях отрезка $[a, b]$ обозначим $\overset{b}{\underset{a}{V}}{}^{(r)}(f)$. Если для р. п. п. функции $f(x)$ существуют числа $A > 0$ и $L > 0$ такие, что $\overset{a+L}{\underset{a}{V}}{}^{(r)}(f) \leqslant A$ для произвольных a, то $f(x)$ называют функцией ограниченной r-вариации [1].

Ниже рассмотрим несколько признаков сходимости ряда

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^\beta |j|^\gamma. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < \beta < 2$, $\gamma \geqslant 0$ *и* $1 \leqslant r < 2p$. *Если р. п. п. функция* $f(x)$ *является функцией ограничен-*

ной r-вариации и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/2p-1}\,[\Lambda(n)]^{1-\beta/2+\gamma}\,\omega_{r+(2-r)q}^{\beta-\beta r/2p}\left(\frac{\pi}{2n};f\right) \tag{3}$$

сходится, где $\Lambda(n)=\max\limits_{0<\lambda_j\leqslant n} j$, *то ряд* (2) *сходится.*

Доказательство. Пусть

$$[\bar{\omega}_2(h;f)]^2 = M\{|f(x+h)-f(x)|^2\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{Nh}\int_{l}^{l+Nh}|f(x+h)-f(x)|^2\,dx. \tag{4}$$

В силу существования предела в (4) равномерно по l [2, с. 34], можем записать, что $\bar{\omega}_2^2(h;f)=\frac{1}{Nh}\int\limits_{kh}^{kh+Nh}|f(x+h)-f(x)|^2\,dx+\varepsilon_k(N)$, где $\varepsilon_k(N)\to 0$ при $N\to\infty$ равномерно по k.

Пусть целое число s удовлетворяет неравенствам $sh\leqslant L<(s+1)h$, где L берем из условия ограниченности r-вариации функции $f(x)$. Тогда

$$s\,[\bar{\omega}_2^2(h;f)]^p=\sum_{k=0}^{s-1}\left[\frac{1}{Nh}\int_{kh}^{kh+Nh}|f(x+h)-f(x)|^2\,dx+\varepsilon_k(N)\right]^p.$$

Далее получим, что

$$s\,\bar{\omega}_2^{2p}(h;f)=\sum_{k=0}^{s-1}\left[\frac{1}{Nh}\int_{kh}^{kh+Nh}|f(x+h)-f(x)|^2\,dx\right]^p+\sum_{k=0}^{s-1}\varepsilon'_k(N), \tag{5}$$

где $\varepsilon'_k(N)\to 0$ при $N\to\infty$. Запишем следующие преобразования:

$$2=r/p+(2-r/p)=r/p+\frac{(2-r)q+r}{q}. \tag{6}$$

Используя (6) и неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{k=0}^{s-1}\left[\frac{1}{Nh}\int_{kh}^{kh+Nh}|f(x+h)-f(x)|^2\,dx\right]^p\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{Nh}\left(\int_{kh}^{kh+Nh}|f(x+h)-f(x)|^r\,dx\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{Nh}\int_{kh}^{kh+Nh}|f(x+h)-f(x)|^{r+(2-r)q}\,dx\right)^{p/q}=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{Nh}\int_0^{Nh}|f(x+(k+1)h)-f(x+kh)|^r\,dx\right)(\bar{\omega}_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h;f)+\varepsilon''_k(N))\leqslant$$

$$\leqslant(\bar{\omega}_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h;f)+\varepsilon(N))\frac{1}{Nh}\int_0^{Nh}\sum_{k=0}^{s-1}|f(x+(k+1)h)-f(x+kh)|^r\,dx,$$

где $\varepsilon(N)\to 0$ при $N\to\infty$. Учитывая, что $f(x)$ — функция ограниченной r-вариации, получим неравенство $s\bar{\omega}_2^{2p}(h;f)\leqslant(\bar{\omega}_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h;f)+\varepsilon(N))A+\sum_{k=0}^{s-1}\varepsilon_k(N)$. Устремляя N к ∞, приходим к неравенству

$$s\bar{\omega}_2^{2p}(h;f)\leqslant A\omega_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h;f). \tag{7}$$

На основании равенства Парсеваля для р. п. п. функций имеем, что $M\{|f(x+h)-f(x-h)|^2\}=4\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2\sin^2 h\lambda_j$. Поэтому

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2\sin^2 h\lambda_j\leqslant\bar{\omega}_2^2(h;f). \tag{8}$$

Из неравенств (7) (8) получаем, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2\sin^2 h\lambda_j\leqslant(s^{-1}A)^{1/p}\omega_{r+(2-r)q}^{2-r/p}(h;f)\leqslant$$

$$\leqslant\left(A/L\,\frac{s+1}{s}\,h\right)^{1/p}\omega_{r+(2-r)q}^{2-r/p}(h;f)\leqslant\left(\frac{2A}{L}\right)^{1/p}h^{1/p}\omega_{r+(2-r)q}^{2-r/p}(h;f); \tag{9}$$

Пусть $h=\pi/2N$. Тогда из (9), принимая во внимание неравенство $\sin x\geqslant$ $\geqslant x\,\dfrac{2}{\pi}$ при $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, получим, что

$$\sum_{|j|=1}^{\Lambda(N)}|A_j|^2\lambda_j^2\leqslant\left(\frac{\pi A}{L}\right)^{1/p}N^{1+1/q}\omega_{r+(2-r)q}^{2-r/p}\left(\frac{\pi}{2N};f\right). \tag{10}$$

Пусть $\varphi_n=\sum_{|j|=1}^{\Lambda(n)}|A_j|^{\beta}|\lambda_j|^{\beta}|j|^{\gamma}$. Тогда в силу неравенства Шварца

$$\varphi_n\leqslant\left(\sum_{|j|=1}^{\Lambda(n)}|A_j|^2|\lambda_j|^2|j|^{2\gamma/\beta}\right)^{\beta/2}[\Lambda(n)]^{1-\beta/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_1 n^{\beta/2(1+1/q)}[\Lambda(n)]^{1-\beta/2+\gamma}\omega_{r+(2-r)q}^{\beta-\beta r/2p}(\pi/2n;f). \tag{11}$$

Из определения φ_n следует

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{\varphi_k-\varphi_{k-1}}{(k-1)^{\beta}}=\sum_{k=2}^{n}\sum_{|j|=\Lambda(k-1)+1}^{\Lambda(k)}|A_j|^{\beta}|j|^{\gamma}\left(\frac{|\lambda_j|}{k-1}\right)^{\beta}\geqslant\sum_{|j|=\Lambda(1)+1}^{\Lambda(n)}|A_j|^{\beta}|j|^{\gamma}. \tag{12}$$

Используя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{\varphi_k-\varphi_{k-1}}{(k-1)^{\beta}}=\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\beta}}-\frac{1}{k^{\beta}}\right)\varphi_k+\frac{\varphi_n}{(n-1)^{\beta}}-\varphi_1\leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{k=2}^{n-1}\varphi_k\,\frac{1}{k^{\beta+1}}+\frac{\varphi_n}{(n-1)^{\beta}}. \tag{13}$$

Из неравенств (11) (12) (13) имеем

$$\sum_{|j|=\Lambda(1)+1}^{\Lambda(n)} |A_j|^\beta |j|^\gamma \leqslant C_3 \sum_{n=2}^{N-1} n^{-\frac{\beta}{2p}-1} [\Lambda(n)]^{1-\frac{\beta}{2}+\gamma} \omega_{r+(2-r)q}^{\beta-\frac{\beta r}{2p}}\left(\frac{\pi}{2n}; f\right) + \frac{\varphi_N}{(N-1)^\beta}.$$

Так как $\varphi_n/(n-1)^\beta \to 0$ при $n \to \infty$, то из сходимости ряда (3) следует, что ряд (2) сходится.

Теорема 2. *Пусть* $0<\beta<2$, $\gamma>0$, $\lambda\geqslant 0$, $\lambda+r\geqslant 2$. *Если р. п. п. функция* $f(x)$ *является функцией ограниченной* r*-вариации и ряд*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\frac{\nu\beta}{\lambda+r}} [\Lambda(2^\nu)]^\gamma [\Lambda(2^{\nu+1}) - \Lambda(2^\nu)]^{1-\frac{\beta}{2}} [\omega(\pi 2^{-\nu-1}; f)]^{\frac{\beta\lambda}{\lambda+r}}$$

сходится, то и ряд (2) *сходится.*

Доказательство. Запишем равенство (5) при $p=1$

$$s\overline{\omega}_2^2(h; f) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{Nh} \int_{kh}^{kh+Nh} |f(x+h) - f(x)|^2\, dx + \sum_{k=0}^{s-1} \varepsilon_k(N). \tag{14}$$

Оценим сумму, используя неравенство Гельдера и условие ограниченности r-вариации

$$\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{Nh} \int_{kh}^{kh+Nh} |f(x+h) - f(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{Nh} \int_0^{Nh} \left[\sum_{k=0}^{s-1} |f(x+(k+1)h) - f(x+kh)|^{\lambda+r} \right]^{\frac{2}{\lambda+r}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{s-1} 1 \right)^{1-\frac{2}{\lambda+r}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{Nh} \int_0^{Nh} \left[\omega^\lambda(h; f) \sum_{k=0}^{s-1} |f(x+(k+1)h) - f(x+kh)|^r \right]^{\frac{2}{\lambda+r}} s^{1-\frac{2}{\lambda+r}}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_4 [\omega(h; f)]^{\frac{2\lambda}{\lambda+r}} s^{1-\frac{2}{\lambda+r}}.$$

Используем полученную оценку в (14) и заметим, что $hs \leqslant L$. Тогда устремляя $N\to\infty$, получим, что

$$\overline{\omega}_2^2(h; f) \leqslant C_5 [\omega(h; f)]^{\frac{2\lambda}{\lambda+r}} h^{\frac{2}{\lambda+r}}. \tag{15}$$

Из полученного неравенства и равенства (8) при $h=\pi/2n$ следует, что $\sum_{|j|=\Lambda(n)}^{\Lambda(2n)-1} |A_j|^2 \leqslant C_6 [\omega(\pi/2n; f)]^{\frac{2\lambda}{\lambda+r}} n^{-\frac{2}{\lambda+r}}$. Отсюда

$$\sum_{|j|=\Lambda(n)}^{\Lambda(2n)-1} |A_j|^\beta |j|^\gamma \leqslant \left(\sum_{|j|=\Lambda(n)}^{\Lambda(2n)-1} |A_j|^2 \right)^{\beta/2} \left(\sum_{|j|=\Lambda(n)}^{\Lambda(2n)-1} |j|^{\frac{2\gamma}{2-\beta}} \right)^{\frac{2-\beta}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 n^{-\frac{\beta}{\lambda+r}} [\Lambda(n)]^\gamma [\Lambda(2n) - \Lambda(n)]^{1-\beta/2} \left[\omega\left(\frac{\pi}{2n}; f\right) \right]^{\frac{\beta\lambda}{\lambda+r}}.$$

где $\varepsilon(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Учитывая, что $f(x)$ — функция ограниченной r-вариации, получим неравенство $s\overline{\omega}_2^{2p}(h; f) \leqslant (\overline{\omega}_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h; f) + \varepsilon(N))A + \sum_{k=0}^{s-1} \varepsilon_k(N)$.

Окончательно получаем, что

$$\sum_{|j|=\Lambda(1)}^{\infty} |A_j|^{\beta} |j|^{\gamma} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{|j|=\Lambda(2^{\nu})}^{\Lambda(2^{\nu+1})-1} |A_j|^{\beta} |j|^{\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\frac{\nu\beta}{\lambda+r}} [\Lambda(2^{\nu})]^{\gamma} [\Lambda(2^{\nu+1}) - \Lambda(2^{\nu})]^{1-\frac{\beta}{2}} [\omega(\pi \cdot 2^{-\nu-1}; f)]^{\frac{\beta\lambda}{\lambda+r}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \beta < 2$, $r > 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ *и* $\lambda + r \geqslant 2$. *Если р. п. п. функция* $f(x)$ *является функцией ограниченной* r*-вариации и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \lambda_n^{-\frac{\beta}{\lambda+r}} [\omega(\pi/\lambda_n; f)]^{\frac{\beta\lambda}{\lambda+r}} \tag{16}$$

сходится, то ряд (2) *сходится.*

Доказательство. В силу следствия из работы [3] для сходимости ряда (2) достаточно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \omega_2^{\beta}(\pi/\lambda_n; f)$ или, учитывая неравенство (15), — ряда (16).

Рассмотрим некоторые следствия из полученных теорем и связь их с ранее полученными результатами.

В периодическом случае теорема 1 доказана в работах [4] (при $\beta = 1$, $\gamma = 0$) и [5].

Следствие из теоремы 1. *Если р. п. п. функция принадлежит классу* Lip α *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha} [\Lambda(n)]^{1/2} \tag{17}$$

сходится, то ряд Фурье (1) *сходится абсолютно.*

Доказательство следует из того, что функция из класса Lip α является функцией ограниченной $1/\alpha$-вариации.

Если $\lambda_n \geqslant Cn$ и $\alpha > 1/2$, то ряд (17) сходится. Значит, в этом следствии содержится известная теорема Бернштейна.

Теорема 3 пересекается с теоремой 3.2 из работы [6]. Если в теореме 3 положим $\gamma = 0$, $\beta = 1$ и $\lambda = 2 - r$, то получим условие абсолютной сходимости ряда Фурье р. п.. п. функции, которое получено в работе [7, с. 216]. Частный случай этого условия рассмотрен в работе [1].

Из следствия работы [3] имеем, что если $f(x)$ принадлежит классу Lip α и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/2} \lambda_n^{-\beta\alpha} < \infty, \tag{18}$$

то ряд (2) при $\gamma = 0$ сходится.

Оказывается, что в некоторых случаях в условии (18) принадлежность функции к классу Lip α можно заменить принадлежностью к более широкому классу функций ограниченной $1/\alpha$ вариации.

Следствие теоремы 3. *Если* $f(x)$ *является р. п. п. функцией ограниченной* r*-вариации* ($r \geqslant 2$) *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/2} \lambda_n^{\beta/r} < \infty$, *то ряд* (2) *при* $\gamma = 0$ *сходится.*

Для доказательства положим в теореме 3 $\gamma = 0$ и $\lambda = 0$. Если $\lambda_n \geqslant Cn$ то ряд (2) для р. п. п. функции ограниченной r-вариации ($r \geqslant 2$) сходится при $\beta > \frac{2r}{r+2}$, $\gamma = 0$.

В периодическом случае этот результат содержится в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Купцов Н. П. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций.— Мат. сборник, 1956, **40**, с. 157—178.
2. Левитан Б. М. Почти-периодические функции.— М.: Гостехиздат, 1953.— 396 с.
3. Притула Я. Г. Про збіжність рядів з коефіцієнтів Фур'є майже періодичних функцій Безіковича.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 2, с. 119—121.
4. Izumi M. Izumi S. On absolute convergence of Fourier series.— Arkiv för Mat. 1967, **7**, № 12, p. 177—184.
5. Османов Г. И. О сходимости рядов Фурье и преобразований Фурье функций из классов $L_2(0, 2\pi)$, $L_2^{(2)}[0, 2\pi]$ и $L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$.— Труды Азерб. ин-та нефти и химии. Сер. мат., 1970, вып. 28, с. 74—83.
6. Musielak J. On absolute convergence of Fourier series of some almost periodic functions.— Ann. polon. math., 1959, **6**, N 2, c. 145—156.
7. Купцов Н. П. Прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах Банаха и разложения Фурье.— Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1969.
8. Голубов Б. Н. О функциях ограниченной p-вариации.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, **32**, № 4, с. 837—858.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
27.II 1979 г.