УДК 519.929

В. П. Скрипник

Признаки устойчивости систем с преобразованным аргументом, основанные на оценках симметризованных матриц

В статье использованы следующие обозначения. $\| \ \|$ — норма вектора или матрицы, которая равна сумме модулей элементов. $\| \ \|_2$ — евклидова норма. Очевидно, что $\| \ \|_2 \leqslant \| \ \| \leqslant \sqrt{m} \| \ \|_2$, где m — число элементов. Z_λ, где $\lambda \geqslant 0$, — множество вектор-функций, определенных при $t \leqslant t_0$, удовлетворяющих условию Липшица с константой λ. Z — множество вектор-функций, определенных при $t \leqslant t_0$, компоненты которых измеримы по Борелю. $S(A) = \dfrac{A + A^*}{2}$ — симметрическая часть матрицы A, $\max \lambda [S(A)] = \max \{\lambda_i\}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — характеристические числа матрицы $S(A)$.

$$\chi_+(t) = \begin{cases} \chi(t), & \text{если } \chi(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \chi(t) < 0. \end{cases}$$

Введем обозначение $f(t, \xi_l) = f(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$, где $f, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ — m-мерные векторы. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k(t)\, x(\varphi_k(t, x(t))) + f(t, x(\psi_l(t, x(t)))), \tag{1}$$

где φ_k и ψ_l — преобразования аргумента, A_k — квадратные матрицы, x — вектор m-го порядка.

Совокупность следующих условий для системы (1) назовем условиями ω: 1) элементы матриц $A_k(t)$ определены при $t \in [t_0, \infty)$ и измеримы на любом конечном отрезке $[t_0, T]$; 2) при $t \in [t_0, \infty)$ $\| A_k(t) \| \leqslant a_k$; 3) компоненты вектор-функции $f(t, \xi_l)$ определены при $t \in [t_0, \infty)$ и $\| \xi_l \| \leqslant R$, где $R > 0$, причем при фиксированных ξ_l измеримы по t на любом конечном отрезке $[t_0, T]$; 4) имеют место неравенства

$$\| f(t, \xi_l'') - f(t, \xi_l') \| \leqslant \sum_{l=1}^{q} H_l \| \xi_l'' - \xi_l' \|, \quad \| f(t, \xi_l) \| \leqslant \sum_{l=1}^{q} h_l(t) \| \xi_l \|,$$

где $h_l(t)$ — интегрируемые функции на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ (можно считать, что $h_l(t) \leqslant H_l$); 5) функции $\varphi_k(t, \xi)$ и $\psi_l(t, \xi)$ определены при $t \in [t_0, \infty)$ и $\| \xi \| \leqslant R$, причем при фиксированных ξ измеримы по t на любом конечном отрезке $[t_0, T]$, а при $t \in [t_0, \infty)$ удовлетворяют условиям Липшица по ξ с одной и той же константой ν; 6) имеют место неравенства $\varphi_k(t, \xi), \psi_l(t, \xi) \leqslant t$; 7) существуют такие интегрируемые на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ функции $\Delta_k(t)$, что $t - \varphi_k(t, \xi) \leqslant \Delta_k(t)$, причем

$\int\limits_{t_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\,d\tau < \infty$; 8) существует такое $\tau_0 \geqslant t_0$, что при $t \geqslant \tau_0$, $t - \Delta_k(t) \geqslant t_0$.

Решение системы (1) понимается в следующем смысле. Пусть $z \in Z_\lambda$ и $T_0 > t_0$. Абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$ будем называть решением системы (1), когда $t \in [t_0, T_0]$, соответствующим начальной вектор-функции $z(t)$, если выполняются следующие условия: 1) при $t \leqslant t_0$ $x(t) = z(t)$; 2) выражение $\sum\limits_{k=1}^{p} A_k(t)\,x(\varphi_k(t, x(t))) + f(t, x(\psi_l(t, x(t))))$, определено при всех $t \in [t_0, T_0]$; 3) равенство (1) выполняется почти при всех $t \in [t_0, T_0]$.

Тривиальное решение системы (1) называется устойчивым по отношению к Z_λ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что решение системы (1), соответствующее любой $z \in Z_\lambda$ такой, что $\|z(t)\| < \delta$, при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Предположим, что*: 1) *для системы* (1) *выполняются условия* ω; 2) $\int\limits_{t_0}^{\infty} \max \lambda\,[S(A(\tau))]_+\,d\tau < \infty$, *где* $A(t) = \sum\limits_{k=1}^{p} A_k(t)$. *Тогда тривиальное решение системы* (1) *устойчиво по отношению к* Z_λ *при любом* $\lambda \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим

$$g(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{при } \|\xi\| \leqslant R, \\ \dfrac{R}{\|\xi\|}\,\xi & \text{при } \|\xi\| > R, \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_k(t, \xi) = \varphi_k(t, g(\xi)), \quad \bar{\psi}_l(t, \xi) = \psi_l(t, g(\xi)), \quad F(t, \xi_l) = f(t, g(\xi_l)).$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k(t)\,g(x(\bar{\varphi}_k(t, x(t)))) + F(t, x(\bar{\psi}_l(t, x(t)))). \tag{2}$$

Возьмем любое множество Z_λ и любую ограниченную $z \in Z_\lambda$. Пусть $t_1 > t_0$ — любое. Обозначим $\lambda_0 = \max\{\lambda, (a + H)R\}$, $\beta = \sup\limits_{t \leqslant t_0} \|z(t)\|$, $\bar{\beta} = (a + H)\beta(t_1 - t_0)$, $d = 4\lambda_0 \nu a + 2a + 4\lambda_0 \nu H + 2H$.

Рассмотрим последовательные приближения

$$x_n(t) = \begin{cases} z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \sum\limits_{k=1}^{p} A_k(\tau)\,g(x_{n-1}(\bar{\varphi}_k(\tau, x_{n-1}(\tau))))\,dt + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau, x_{n-1}(\bar{\psi}_l(\tau, x_{n-1}(\tau))))\,d\tau \quad \text{при } t \in (t_0, t_1], \\ z(t) \quad \text{при } t \leqslant t_0, \end{cases}$$
$$x_0(t) = \begin{cases} z(t_0) & \text{при } t \in (t_0, t_1], \\ z(t) & \text{при } t \leqslant t_0. \end{cases} \tag{3}$$

При помощи этих приближений нетрудно показать, что существует единственное решение $x(t)$ системы (2), когда $t \in [t_0, t_1]$, соответствующее $z(t)$. При $t \in [t_0, t_1]$ справедливо неравенство $\|x(t)\| \leqslant \beta + \bar{\beta} \exp[d(t - t_0)]$. Так как $t_1 > t_0$ — любое, то решение $x(t)$ бесконечно продолжимо. Каковы бы ни были $T > t_0$ и $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы (2), соответствующего $z \in Z_\lambda$ такой, что $\|z(t)\| < \delta$ при $t \in [t_0, T]$, $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Пусть $T_0 \geqslant \tau_0$ такое, что $L_2(T_0) < 1$, где

$$L_2(T_0) = m \left[2 \int_{T_0}^{\infty} \max \lambda \left[S(A(\tau)) \right]_+ d\tau + \right.$$

$$\left. + 2a(a+H) \sum_{k=1}^{p} \int_{T_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau + 2 \sum_{l=1}^{q} \int_{T_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau \right].$$

Возьмем любое множество Z_λ. Пусть δ_1 удовлетворяет неравенствам $0 < \delta_1 < R$,

$$\frac{L_1(\delta_1, T_0) + \sqrt{L_1^2(\delta_1, T_0) + 4(1 - L_2(T_0))\, L(\delta_1, T_0)}}{2(1 - L_2(T_0))} < R,$$

где

$$L(\delta_1, T_0) = m \left[\delta_1^2 + \delta_1^2 \int_{t_0}^{T_0} \max \lambda \left[S(A(\tau)) \right]_+ d\tau + 2\delta_1^2 H (T_0 - t_0) \right],$$

$$L_1(\delta_1, T_0) = m \left[2a(a+H)\, \delta_1 \sum_{k=1}^{p} \int_{T_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau + 2\delta_1 \sum_{l=1}^{q} \int_{T_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau \right]$$

и пусть $\delta > 0$ такое, что любое решение $x(t)$ системы (2), соответствующее такой $z \in Z_\lambda$, что $\| z(t) \| < \delta$, при $t \in [t_0, T_0]$ удовлетворяет неравенству $\| x(t) \| < \delta_1$. Множество таких решений системы (2) обозначим через X.

Пусть $x \in X$ — любое. Рассуждая от противного и учитывая неравенство $(S(A(t))\, x(t),\ x(t)) \leqslant \max \lambda \left[S(A(t)) \right] \| x(t) \|_2^2$, получим, что при $t \geqslant T_0$

$$\| x(t) \| \leqslant \frac{L_1(\delta_1, T_0) + \sqrt{L_1^2(\delta_1, T_0) + 4(1 - L_2(T_0))\, L(\delta_1, T_0)}}{2(1 - L_2(T_0))}. \qquad (4)$$

Так как δ_1, а также правую часть неравенства (4) можно сделать сколь-угодно малыми, если достаточно мало δ, то тривиальное решение системы (1) устойчиво. Теорема 1 доказана.

В случае, когда преобразования аргумента не зависят от искомой функции, в качестве множества начальных вектор-функций можно взять Z. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k(t)\, x(\varphi_k(t)) + f(t, x(\psi_l(t))). \qquad (5)$$

Совокупность следующих условий для системы (5) обозначим ω_1: 1) матрицы $A_k(t)$ и вектор-функция $f(t, \xi_l)$ удовлетворяют условиям 1) — 4) из условий ω; 2) функции $\varphi_k(t)$ и $\psi_l(t)$ определены при $t \in [t_0, \infty)$, удовлетворяют неравенствам $\varphi_k(t)$, $\psi_l(t) \leqslant t$ и измеримы на любом конечном отрезке $[t_0, T]$; 3) запаздывания $\Delta_k(t) = t - \varphi_k(t)$ интегрируемы на любом конечном отрезке $[t_0, T]$, причем $\int_{t_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau < \infty$; 4) существует такое $\tau_0 \geqslant t_0$, что при $t \geqslant \tau_0$ $\varphi_k(t) \geqslant t_0$.

Решение системы (5), когда $t \in [t_0, T]$, где $T > t_0$, соответствующее $z \in Z$, определяется таким же образом, как и решение системы (1). Устойчивость тривиального решения системы (5) по отношению к Z определяется таким же образом, как и устойчивость тривиального решения системы (1) по отношению к Z_λ.

Т е о р е м а 2. *Если для системы* (5) *выполняются условия* ω_1 *и условие* 2) *теоремы* 1, *то тривиальное решение системы* (5) *устойчиво по отношению к* Z.

Теоремы 1 и 2 допускают обобщение на случай, когда $p,\ q = \infty$; только условия ω надо дополнить условиями

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} H_l < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau < \infty,$$

а условия ω_1 — условием $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скрипник В. П. Критерии устойчивости для систем с преобразованным аргументом, основанные на симметризации матриц.— Дифференц. уравнения, 1976, **12**, № 9, с. 1587—1595.
2. Скрипник В. П. Об устойчивости нелинейной системы со счетным числом преобразований аргумента.— Докл. АН УССР. Серия А, 1977, № 2, с. 116—120.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1959.— 211 с.
4. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 295 с.

Московский
лесотехнический институт

Поступила в редакцию
18.I 1979 г.