УДК 517.947+532.546

Н. И. Бакиевич

Связь между решениями одного уравнения четвертого порядка из теории фильтрации жидкости со свободной поверхностью и решениями уравнения теплопроводности

В статьях [1, 2] рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\Delta u + \beta\Delta\Delta u - \gamma\Delta \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

где α, β, γ — постоянные положительные коэффициенты, Δ — оператор Лапласа. Из результатов статьи [3] следует, что решение этого уравнения $u = u(x, y, t)$ приближенно характеризует форму свободной поверхности фильтрующейся жидкости в пласте ограниченной мощности и что $a = \alpha - \beta/\gamma > 0$. Начальное условие для уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \tag{2}$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция. Пусть пористый пласт соответствует области D на плоскости xoy и по кривой L, ограничивающей область D, соприкасается с водонепроницаемой вертикальной преградой. Тогда на L должны выполняться краевые условия

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n}\right|_L = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial t}\right|_L = 0, \left.\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|_L = 0. \tag{3}$$

Решение $u(x, y, t)$ предполагается достаточно гладким в замкнутой области $\overline{D}$. Если область D неограничена, то как в случае задачи Коши (1), (2), так и для краевой задачи (1), (2), (3) будем считать, что

$$|f(x, y)| \leqslant M \exp(Ar), \quad |u(x, y, t)| \leqslant M_1 \exp(A_1 r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{4}$$

при $A < A_1 < 1/\sqrt{\gamma}$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (M, M_1, A, A_1, T — постоянные, T — произвольная) и что аналогичные неравенства выполняются для u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{yy}, u'_t. Применяя преобразование Фурье по x и y, можно показать, что решение задачи Коши (1), (2) не будет единственно, если условия (4) выполняются лишь при $A_1 > 1/\sqrt{\gamma}$.

Обозначим через $U(x, y, t)$ решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U, \tag{5}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(x, y, 0) = f(x, y) \tag{6}$$

с той же правой частью, что и (2). Пусть

$$a = \alpha - \frac{\beta}{\gamma}, \quad b = \frac{\beta}{\gamma}, \quad c = \frac{a}{\gamma}, \quad a > 0. \tag{7}$$

Предположим также, что

$$|U(x, y, t)| \leqslant M_2 \exp(A_1 r + A_1^2 t), \quad A_1 < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, \tag{8}$$

при $t \to \infty$, $P(x, y) \in D$ (M_2 — постоянная) и что аналогичным неравенствам удовлетворяют U'_x, U'_y, U'_{xx}, U''_{yy}, U'_t. (О подобных неравенствах см., например, [4, гл. 1, §4]). Тогда, как покажем, формулы

$$u(x, y, t) = \exp(-ct)\, v(x, y, t), \tag{9}$$

$$v(x, y, t) = U(x, y, bt) + c \int_0^{+\infty} U(x, y, a\tau + bt) \exp(-c\tau) \sqrt{\frac{t}{\tau}}\, I_1(2c\sqrt{t\tau})\, d\tau \tag{10}$$

выражают решение задачи Коши (1), (2). Здесь $I_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя (см. [5, 7.2.2]). Эти формулы дают и решение краевой задачи (1), (2), (3), если $U(x, y, t)$ удовлетворяет в D (5) и (6), а на L

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_L = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial t}\right|_L = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial n}\right|_L = 0, \tag{11}$$

причем производные, входящие в (11), непрерывны в $\bar{D}$ и оценки по t при $t \to \infty$ вида (8) выполняются и для них в $\bar{D}$. Перейдем к доказательству. Легко проверить, что u, определяемая (9), удовлетворяет (1), если v, w — решение системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = w, \quad \Delta w - \frac{1}{\gamma} w = -\frac{c}{\gamma} v. \tag{12}$$

(Первое из этих уравнений вводится как определение w). Будем использовать тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\frac{t}{\tau}}\, I_1(2c\sqrt{t\tau})\right] = cI_0(2c\sqrt{t\tau});$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_0(2c\sqrt{t\tau}) = c\sqrt{\frac{t}{\tau}}\, I_1(2c\sqrt{t\tau}), \tag{13}$$

которые вытекают из формул (19), (20) работы. [5, с 90]. Для оценки сходимости интегралов можно использовать (8) и неравенство

$$|I_n(2c\sqrt{t\tau})| \leqslant (c\sqrt{t\tau})^n \frac{\exp(2c\sqrt{t\tau})}{n!} \tag{14}$$

(см. [5, с. 23, формула (4)]). Дифференцируя (10) под знаком интеграла и учитывая первое из тождеств (13) и (5), получаем

$$w = \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = c^2 \int_0^{+\infty} U(x, y, a\tau + bt) \exp(-c\tau)\, I_0(2c\sqrt{t\tau})\, d\tau. \tag{15}$$

Далее, применяя уравнение (5) и равенства (7), находим

$$\Delta w = \frac{c}{\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{\partial U(x, y, a\tau + bt)}{\partial \tau} \exp(-c\tau)\, I_0(2c\sqrt{t\tau})\, d\tau.$$

Проинтегрируем этот интеграл по частям, используя второе тождество (13), а при вычислении проинтегрированного члена — неравенства (8) и (14). Получаем

$$\Delta w = \frac{c}{\gamma} \left\{ -U(x, y, bt) + c \int U(x, y, a\tau + bt) \exp(-c\tau)\, I_0(2c\sqrt{t\tau})\, d\tau - \right.$$

$$- c \int_{0}^{+\infty} U(x, y, a\tau + bt) \exp(-c\tau) \sqrt{\frac{t}{\tau}} I_1 (2c \sqrt{t\tau}) \, d\tau \Biggr\} . \tag{16}$$

Из (16), (15) и (10) следует, что v, w — решение системы (12). Все преобразования легко обосновать с помощью неравенств (8) и (14). Очевидно, что в силу (6), (9) и (10) выполняется (2), а из (11), (10), (15) вытекают (3). Оценки (4) для u и ее производных следствия неравенств (8).

Заменив в формулах (10), (15) t на $t - t'$, получим при $t \geqslant t'$ функции $V(x, y, t - t')$, $W(x, y, t - t')$, которые по аргументам x, y, t' удовлетворяют системе, сопряженной (12), и условию

$$V(x, y, t - t')|_{t'=t} = \varphi(x, y), \text{ если } U(x, y, 0) = \varphi(x, y), \tag{17}$$

где $\varphi(x, y)$ — произвольная основная функция пространства $K(D)$ с носителем в D (см. [6, гл. II, §1]). Если $U(x, y, t)$ — решение краевой задачи (5), (17), (11), то $\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_L = 0$, $\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_L = 0$. (Для достаточно гладких функций эти условия равносильны условиям вида (3)). Используя эти V, W и интегральные формулы для операторов теплопроводности и Гельмгольца (см. [7, гл. 4, § 5, (11′) и гл. 3, § 5, (109)]), можно доказать единственность решений задачи Коши (1), (2) и краевой задачи (1), (2), (3) в классе достаточно гладких функций, удовлетворяющих условиям (4).

Если в формулах (9), (10) взять в качестве U фундаментальное решение уравнения (5) (см. [7, гл. 4, § 4, (6″) (7′)]), то получим выражения фундаментальных решений уравнения (1).

Предположим, что $f(x, y)$ — достаточно гладкая функция. Тогда из формул (9), (10) следует также, что при малых t

$$u(x, y, t) = U(x, y, bt) - ctU(x, y, bt) + \frac{c}{\gamma} t\bar{U}\left(x, y, \frac{1}{\gamma}\right) + O(t^2),$$

где $\bar{U}(x, y, p)$ — преобразование Лапласа $U(x, y, t)$, $O(t^2)$ — величина порядка t^2 при $t \to 0$.

Все полученные результаты остаются верными и для соответствующих одномерных задач, когда u, U, f не зависят от y.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стакун Н. С., Шадрин Г. А. Построение фундаментального решения и его асимптотики для одного дифференциального уравнения 4-го порядка.— В кн.: Дифференциальные уравнения и неравенства. М.: Моск. пединститут им. В. И. Ленина, 1972. с. 14—25.
2. Стакун Н. С., Шадрин Г. А. О двух подходах при построении фундаментального решения для одного дифференциального уравнения 4-го порядка.— В кн.: Дифференциальные уравнения и неравенства. М.: Моск. пединститут, им. В. И. Ленина, 1972, с. 26—32.
3. Дзецкер Е. С. Шадрин Г. А. О движении грунтовых вод со свободной поверхностью.— Труды Производственного и научно-исследовательского института по инженерным изысканиям в строительстве Госстроя СССР, 1971, 10 с. 22—44.
4. Годунов С. К. Уравнения математической физики.— М.: Физматгиз, 1971.— 416 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1966.— Т. 2. 295 с.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.
7. Положий Г. Н. Уравнения математической физики.— М.: Высшая школа 1964.— 559 с.

Донецкий филиал Харьковского института инженеров железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию 13.VIII 1979 г.; после переработки — 22.IV 1980 г.