УДК 517.928

Р. И. Петришин

Усреднение с учетом резонансных соотношений между частотами в колебательных системах

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащую медленные (позиционные) и быстрые угловые переменные, вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon a(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(x), \tag{1}$$

где x и φ — соответственно n и m-мерные векторы, ε — малый положительный параметр, действительные вектор-функции $a(x, \varphi)$ и $\omega(x)$ определены и 2π-периодичны по φ в области

$$G_{n+m} = \{x \in D \subset R^n, \ \varphi \in R^m\}. \tag{2}$$

Системы такого вида изучались многими авторами [1—6]. В настоящей заметке дано обоснование метода усреднения по быстрым переменным с учетом разонансных соотношений между частотами [5], позволяющего сохранять в усредненных уравнениях кроме вековых членов также долгопериодические гармоники.

Зададим некоторое натуральное число N и рассмотрим множество Q, состоящее из целочисленных m-мерных векторов K, для которых норма $|k| = \sum_{i=1}^{m} |k_i| \leqslant N$. Пусть $\bar{Q} \subset Q$. Тогда системе (1) поставим в соответствие систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon \sum_{k \in \bar{Q}} a_k(\bar{x}) e^{i(k, \bar{\varphi})}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \omega(\bar{x}) \tag{3}$$

и назовем ее усредненной. Изучим вопрос о близости медленных решений систем (1) и (3) на временном отрезке $[0, \varepsilon^{-1}]$ при условии, что $x(0) = \bar{x}(0)$, $\varphi(0) = \bar{\varphi}(0)$.

Предположим, что $Q = \bigcup_{i=1}^{4} Q_i$, где

$$Q_1 = \{k; \ |(k, \omega(x))| \leqslant \sigma_1 |k|^{-l_1} \ \forall x \in D\}, \tag{4}$$

$$Q_2 = \left\{k; \int_0^t \| a_k(\bar{x}(\tau)) \| \, d\tau \leqslant \sigma_2 \varepsilon^{-l_2} \ \forall t \in [0, \varepsilon^{-1}], \ l_2 < 1\right\}, \tag{5}$$

$$Q_3 = \left\{k; \ \left\| \frac{\partial (k, \omega)}{\partial x} \right\| \leqslant \sigma_3 \varepsilon |k|^{l_3} \ \forall x \in D\right\}, \tag{6}$$

$$Q_4 = \left\{k;\ \left|\left(\frac{\partial (k, \omega)}{\partial x},\ \delta (x, \varphi)\right)\right| \geqslant \frac{\sigma_4}{|k|^{l_4}},\ |(k, \omega (x))| \leqslant \sigma_5 \varepsilon^{l_5},\ \varphi \in R^m\right\}, \quad (7)$$

где $\delta (x, \varphi) = \sum\limits_{k \in Q \setminus Q_3} a_k (x) h_k (x) e^{i(k,\varphi)} + \sum\limits_{k \in Q_3} a_k (x) e^{i(k,\varphi)}$, $h_k (x)$ — финитная скалярная функция, носитель которой совпадает с областью $|(k, \omega (x))| \leqslant \sigma_5 \varepsilon^{l_6}$, причем $h_k (x)$ бесконечно дифференцируема и $0 \leqslant h_k (x) \leqslant 1\ \forall x \in D$. Существование такой функции следует из [7].

Положим $N = E\{\varepsilon^{-\alpha}\}$, где α — некоторое положительное число, удовлетворяющее условию $\alpha < \min\left(\frac{1-2l_6}{1+l_4},\ \frac{1-2l_6}{2},\ \frac{1-l_2}{m}\right)$, $E\{a\}$ — целая часть числа a.

Теорема. *Пусть система* (1) *такова, что*

1) *вектор-функции* $a (x, \varphi)$ *и* $\omega (x)$ *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_D |\omega_i (x)| \leqslant \sigma_6,\quad \max_{0 \leqslant |\rho| \leqslant l_7} \sup_{G_{n+m}} \left| \frac{\partial^{|\rho|} a^{(i)} (x, \varphi)}{\partial \varphi_1^{\rho_1} \ldots \partial \varphi_m^{\rho_m}} \right| \leqslant \sigma_7^{(i)}, \quad (8)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sup_D \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right| \leqslant \sigma_8,\quad \max_{\substack{0 \leqslant |\rho| \leqslant l_8 \\ |s|=1}} \sup_{G_{n+m}} \left| \frac{\partial^{|\rho|+1} a^{(i)}(x, \varphi)}{\partial \varphi_1^{\rho_1} \ldots \partial \varphi_m^{\rho_m} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \right| \leqslant \sigma_9^{(i)}, \quad (9)$$

где $i = \overline{1, n}$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — *целочисленные векторы с неотрицательными компонентами,* $a^{(i)}$ — *i-я компонента вектора* $a (x, \varphi)$;

2) *при* $N = E\{\varepsilon^{-\alpha}\}\ Q = \bigcup\limits_{i=1}^{4} Q_i$, *где* Q_i *определяются из условий* (4) — — (7);

3) $Q_3 \subset \overline{Q}$ *и для каждого вектора* $k \in \overline{Q} \cap Q_4$ *выполняется условие, аналогичное условию* (7), *в котором вместо функции* $\delta (x, \varphi)$ *нужно взять функцию*

$$\overline{\delta} (x, \varphi) = \sum_{k \in \overline{Q} \setminus \overline{Q}_3} a_k (x) e^{i(k,\varphi)} \cdot h_k (x) + \sum_{k \in Q_3} a_k (x) e^{i(k,\varphi)};$$

4) $l_5 < \frac{1}{2}$, $l_6 < \frac{1}{2}$, $l_7 > m + \max (1 + 2l_1,\ 2 + l_4,\ l_3)$, $l_8 > m + \max (1, l_1)$;

5) *решение* $\overline{x} (t)$ *усредненной системы* (3) *содержится в области* D *вместе со своей* μ-*окрестностью.*

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *и* $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$\| x (t) - \overline{x} (t) \| \leqslant \sigma_{10} (\varepsilon^{\alpha(l_7 - m)} + \varepsilon^{1 - l_2 - \alpha \cdot m} + \varepsilon^{\frac{1}{2} - l_6}), \quad (10)$$

где σ_{10} *некоторая постоянная.*

Доказательство. Положим в системе (1) $z (t) = x (t) - \overline{x} (t)$, тогда

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \sum_{k \in Q_3} a_k (\overline{x}) [e^{i(k,\varphi)} - e^{i(k,\overline{\varphi})}] + \varepsilon \frac{\overline{\partial a_N}}{\partial x} z (t) + \varepsilon \sum_{k \in Q \setminus Q_3} a_k (\overline{x}) e^{i(k,\varphi)} -$$

$$- \varepsilon \sum_{k \in \overline{Q} \setminus Q_3} a_k (\overline{x}) e^{i(k,\varphi)} + \varepsilon R_N a,$$

где $a_N (x, \varphi) = \sum\limits_{|k| \leqslant N} a_k (x) e^{i(k,\varphi)}$, $R_N a = a (x, \varphi) - a_N (x, \varphi)$, $\frac{\overline{\partial a_N}}{\partial x}$ — некоторое среднее значение функции $\frac{\partial a_N}{\partial x}$ в области G_{n+m}. Учитывая, что для $k \in Q_3$

$$|(k, \varphi) - (k, \bar{\varphi})| = \left| \int_0^t [(k, \omega(x)) - (k, \omega(\bar{x}))] \, d\tau \right| \leqslant \sigma_3 \varepsilon |k|^{l_3} \int_0^t \| z(\tau) \| \, d\tau,$$

получаем

$$\| z(t) \| \leqslant \varepsilon^2 \sum_{k \in Q_3} \sup_D \| a_k \| \sigma_3 |k|^{l_3} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \| z \| \, d\tau_1 + \varepsilon \sup_{G_{n+m}} \left\| \frac{\partial a_N}{\partial x} \right\| \int_0^t \| z(\tau) \| \, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_0^t \sum_{k \in Q \setminus Q_3} a_k(\bar{x}) \, e^{i(k,\varphi)} d\tau - \int_0^t \sum_{k \in \bar{Q} \setminus Q_3} a_k(\bar{x}) \, e^{i(k,\bar{\varphi})} \, d\tau + \int_0^t R_N a d\tau \right\|.$$

Известно [6], что при выполнении (8) существуют постоянные σ_{11} и σ_{12} такие, что $\| R_N a \| \leqslant \sigma_{11} N^{-(l_7 - m)}$, $\sigma_3 \sum_{k \in Q_3} |k|^{l_3} \sup_D \| a_k \| \leqslant \sigma_{12}$ при $l_7 > m + l_3$. Так как $\varepsilon \int_0^t d\tau \int_0^\tau \| z(\tau_1) \| \, d\tau_1 \leqslant \int_0^t \| z(\tau) \| \, d\tau$ для $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$, то по лемме Гронуолла — Беллмана

$$\| z(t) \| \leqslant \left[\sigma_{11} N^{-l_7 + m} + \varepsilon \sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1}]} \left(\left\| \int_0^t \sum_{k \in Q \setminus Q_3} a_k(\bar{x}) \, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\| \int_0^t \sum_{k \in \bar{Q} \setminus Q_3} a_k(\bar{x}) \, e^{i(k,\bar{\varphi})} d\tau \right\| \right) \right] \exp\left(\sigma_{12} + n \sum_{i=1}^n \sigma_9^{(i)} \right). \tag{11}$$

Если $k \in Q_2$, то

$$\left\| \int_0^t \sum_{k \in Q_2} a_k(\bar{x}) \, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| \leqslant \sum_{|k| \leqslant N} \sigma_2 \varepsilon^{-l_2} \leqslant \sigma_2 \cdot 2^m \varepsilon^{-l_2} N^m. \tag{12}$$

Пусть $k \in Q_1$. Тогда

$$\sum_{k \in Q_1} \left\| \int_0^t a_k(\bar{x}) \, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| = \sum_{k \in Q_1} \left\| \int_0^t \frac{a_k(\bar{x})}{(k, \omega(x))} (k, \omega(x)) \, e^{i(k,\varphi)} \, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \in Q_1} \left(\left\| \frac{a_k(\bar{x})}{(k, \omega(x))} e^{i(k,\varphi)} \Big|_0^t \right\| + \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{a_k(\bar{x})}{(k, \omega(x))} \right) e^{i(k,\varphi)} \, d\tau \right\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \in Q_1} \left(2 \sup_D \| a_k \| \, |k|^{l_1} \frac{1}{\sigma_1} + \varepsilon t \sup_D \left\| \frac{\partial a_k}{\partial x} \right\| \sup_{G_{n+m}} \| a \| \frac{1}{\sigma_1} |k|^{l_1} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon t \sup_D \| a_k \| \sup_{G_{n+m}} \| a \| \frac{1}{\sigma_1^2} |k|^{2l_1 + 1} \sup_D \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\| \right).$$

Учитывая условия (8) и (9), можно показать, что при $l_7 - 2l_1 - 1 - m > 0$ и $l_8 - m - l_1 > 0$ $\forall t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ последняя сумма не превышает некоторой постоянной σ_{13}, т. е.

$$\left\| \int_0^t \sum_{k \in Q_1} a_k(\bar{x}) \, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| \leqslant \sigma_{13}. \tag{13}$$

Пусть $k \in Q_4$. Положим в системе (1) $x = y + \varepsilon U(y, \varphi)$, где $U(y, \varphi) = -i \sum\limits_{k \in Q \setminus Q_3} a_k(y)(1 - h_k(y))(k, \omega(y))^{-1} e^{i(k,\varphi)}$. Так как выполняются условия (7) — (9), то

$$\| U(y, \varphi) \| \leqslant \sigma_{14} \varepsilon^{-l_6}, \quad \left\| \frac{\partial U(y, \varphi)}{\partial \varphi} \right\| \leqslant \sigma_{15} \varepsilon^{-l_6}, \quad \left\| \frac{\partial U(y, \varphi)}{\partial y} \right\| \leqslant \sigma_{16} \varepsilon^{-2l_6},$$

где σ_{14}, σ_{15}, и σ_{16} — некоторые постоянные. Поэтому в новых переменных систему (1) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \delta(y, \varphi) + \varepsilon^2 A_1 + \varepsilon R_N a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(y + \varepsilon U), \tag{14}$$

где $\sup\limits_{t \in [0, \varepsilon^{-1}]} \| A_1 \| \leqslant \sigma_{17} \varepsilon^{-2l_6}$. Тогда в области $|(k, \omega(y))| \leqslant \sigma_5 \varepsilon^{l_5}$

$$\left| \frac{d}{dt}(k, \omega(y)) \right| \geqslant \left| \left(\frac{\partial (k, \omega)}{\partial y}, \ \delta(y, \varphi) \right) \right| \varepsilon - \varepsilon |k| \sigma_9 (\varepsilon^{1-2l_6} \sigma_{17} + \sigma_{11} N^{-l_7+m}) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon \sigma_4 |k|^{-l_4} - \varepsilon |k| \sigma_9 (\sigma_{17} \varepsilon^{1-2l_6} + \sigma_{11} N^{-l_7+m}) \geqslant \varepsilon \frac{\sigma_4}{2} |k|^{-l_4} \tag{15}$$

при $\quad \sigma_4 - 2|k|^{l_4+1} \sigma_9 (\sigma_{17} \varepsilon^{1-2l_6} + \sigma_{11} N^{-l_7+m}) \geqslant \sigma_4 - 2\sigma_9 \varepsilon^{1-2l_6-\alpha(l_4+1)} \sigma_{17} - 2\sigma_9 \sigma_{11} N^{-l_7+m+l_4+1}.$

Последнее неравенство будет выполняться, если ε достаточно мало и $1 - 2l_6 - \alpha(l_4 + 1) > 0$, $\ l_7 - m - l_4 - 1 > 0$.

Из условия (15) следует, что решение $y(t)$ системы (14) не будет застревать в окрестности резонанса вида $(k, \omega(y)) = 0$. В самом деле, пусть $(k, \omega(y(t_1))) | = \sigma_5 \varepsilon^{l_5}$, $\ |(k, \omega(y(t_2)))| = \varepsilon^{l_5'}$, где $l_5' > l_5$. Тогда

$$|t_2 - t_1| \geqslant \frac{\sigma_5 \varepsilon^{l_5} - \varepsilon^{l_5'}}{\sup\limits_D \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\| |k| \sup\limits_{t \in [0, \varepsilon^{-1}]} \left\| \frac{dy}{dt} \right\|} \geqslant \sigma_{18} \varepsilon^{l_5 - 1} |k|^{-1}.$$

Отсюда следует, что решение $y(t)$ может попасть в область $|(k, \omega(y))| \leqslant \varepsilon^{l_5'}$ при $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ не более чем $\frac{1}{\sigma_{18}} |k| \varepsilon^{-l_5}$ раз, и суммарное время пребывания решения в этой области не превышает

$$\frac{2\varepsilon^{l_5'}}{\inf\limits_{|(k,\omega)| < \varepsilon^{l_5'}} \left\| \frac{dy}{dt} \right\|} \frac{|k|}{\sigma_{18}} \varepsilon^{-l_5} \leqslant \frac{4}{\sigma_4 \sigma_{18}} |k|^{1+l_4} \varepsilon^{l_5' - l_5 - 1}. \tag{16}$$

Если же в некоторой точке $t \ |(k, \omega(y(t)))| > \varepsilon^{l_5'}$, то

$$|(k, \omega(x(t)))| \geqslant |(k, \omega(y(t)))| - |k| \varepsilon \sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1}]} \| U \| \sup_D \left\| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right\| \geqslant$$

$$\geqslant |(k, \omega(y(t)))| - \varepsilon^{1 - l_6 - \alpha} \sigma_{14} \sigma_8 \geqslant \frac{1}{2} |(k, \omega(y(t)))| \tag{17}$$

при достаточно малом ε и при $1 - l_6 - \alpha > l_5'$. Тогда будем иметь

$$\sum_{k \in Q_4} \left\| \int_0^t a_k(\bar{x}) e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| \leqslant \sum_{k \in Q_4} \sum_s \left(\left\| \int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} a_k(\bar{x}) e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| + \left\| \int_{t_2^{(s)}}^{t_1^{(s+1)}} a_k(\bar{x}) e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| \right),$$

где $(t_1^{(s)}, t_2^{(s)})$ — временной интервал, в каждой точке которого $|(k, \omega(y(t)))| \geqslant \varepsilon^{l_5'}$, а $(t_2^{(s)}, t_1^{(s+1)})$ — интервал, в каждой точке которого $|(k, \omega(y(t)))| < \varepsilon^{l_5'}$. Учитывая (16), имеем

$$\sum_{k\in Q_4}\sum_s \left\| \int_{t_2^{(s)}}^{t_1^{(s+1)}} a_k(\bar{x})\, e^{i(k,\varphi)}\, d\tau \right\| \leqslant \sum_{k\in Q_4} \sup_D \| a_k \| \sum_s (t_1^{(s+1)} - t_2^{(s)}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k|>0} \sup_D \| a_k \| \, |k|^{1+t_4}\, \varepsilon^{l_5'-l_5-1} \frac{4}{\sigma_4\sigma_{18}} \leqslant \sigma_{19}\varepsilon^{l_5'-l_5-1}, \tag{18}$$

где σ_{19} — некоторая постоянная. Нам осталось оценить

$\sum_{k\in Q_4}\sum_s \left\| \int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} a_k(\bar{x})\, e^{i(k,\varphi)}\, d\tau \right\|$. Пусть $[\tau_1^{(s)}, \tau_2^{(s)}] \subset [t_1^{(s)}, t_2^{(s)}]$, причем $\forall t \in [\tau_1^{(s)}, \tau_2^{(s)}] \times$ $\times |(k, \omega(y(t)))| \geqslant \sigma_5\varepsilon^{l_5}$, а $\forall t \in [t_1^{(s)}, t_2^{(s)}] \diagdown [\tau_1^{(s)}, \tau_2^{(s)}]$ выполняется неравенство $(k, \omega(y(t)))| < \sigma_5\varepsilon^{l_5}$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{k\in Q_4}\sum_s \left\| \int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} a_k(\bar{x})\, e^{i(k,\varphi)}\, dt \right\| \leqslant \sum_{k\in Q_4}\sum_s \left(\left\| \frac{a_k(\bar{x})}{(k, \omega(x))} e^{i(k,\varphi)} \Big|_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} \right\| + \right.$$

$$+ \int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} \left\| \frac{d}{dt}\left(\frac{a_k(\bar{x})}{(k, \omega(x))} \right) \right\| dt \Bigg) \leqslant \sum_{k\in Q_4}\sum_s \Bigg(\varepsilon^{1-l_5} \sup_D \left\| \frac{\partial a_k}{\partial x} \right\| \sup_{G_{n+m}} \|\bar{a}\| \, (t_2^{(s)} - t_1^{(s)}) +$$

$$\left. + 2\varepsilon^{-l_5'} \sup_D \| a_k \| + \sigma_8 \sup_D \| a_k \| \sup_{G_{n+m}} \| a \| \, |k| \, \varepsilon \int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} \frac{dt}{(k, \omega(x))^2} \right). \tag{19}$$

Используя условие (17), находим

$$\int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} \frac{dt}{(k, \omega(x))^2} \leqslant 4 \int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} \frac{dt}{(k, \omega(y))^2} \leqslant \frac{8\cdot|k|^{l_4}}{\varepsilon\sigma_4} \left| \int_{\tau_1^{(s)}}^{\tau_1^{(s)}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(k, \omega(y))} \right) dt \right| +$$

$$+ \frac{4\,(t_2^{(s)} - t_1^{(s)})}{\sigma_5^2\varepsilon^{2l_5}} + \frac{8\,|k|^{l_4}}{\varepsilon\sigma_4} \left| \int_{\tau_2^{(s)}}^{t_2^{(s)}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(k, \omega(y))} \right) dt \right| \leqslant \frac{4\,(t_2^{(s)} - t_1^{(s)})}{\sigma_5^2\varepsilon^{2l_5}} + \frac{32}{\varepsilon\sigma_4} |k|^{l_4} \varepsilon^{-l_5}. \tag{20}$$

Из (19), (20) получаем

$$\sum_{k\in Q_4}\sum_s \left\| \int_{t_1^{(s)}}^{t_2^{(s)}} a_k(\bar{x})\, e^{i(k,\varphi)} dt \right\| \leqslant \sigma_{20}\varepsilon^{-l_5'-l_5} \tag{21}$$

при $l_7 > m + l_4 + 2$, $l_8 > m + 1$ и достаточно малом ε. Положив $l_5' = \frac{1}{2}$

и объединяя неравенства (13), (18), (21), выводим

$$\varepsilon \sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}]} \left\| \int_0^t \sum_{k\in Q\setminus Q_3} a_k(\bar{x})\, e^{i(k,\varphi)}\, dt \right\| \leqslant \sigma_{21} \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}-l_5} + \varepsilon^{1-l_2-\alpha m}\right).$$

Аналогично оценивается $\varepsilon \sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}]} \left\| \int_0^t \sum_{k\in \bar{Q}\setminus Q_3} a_k(\bar{x})\, e^{i(k,\bar{\varphi})}\, dt \right\|$. Тогда из (12) следует доказательство теоремы.

Замечание. При сделанных выше предположениях не могут быть получены эффективные оценки нормы $\| \varphi(t) - \bar{\varphi}(t) \|$ на временном отрезке $[0, \varepsilon^{-1}]$, поэтому математическое обоснование метода усреднения в нашем случае сводится к оценке $\| x(t) - \bar{x}(t) \|$ [4].

Следствие. *Если* $l_5 = 0$, $1 - l_2 - \alpha m \geqslant \frac{1}{2}$ *и* l_7 *достаточно велико, то из* (10) *получаем* $\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \sigma_{22} \sqrt{\varepsilon}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.— 503 с.
2. Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы.— Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 1, с. 9—12.
3. Хапаев М. М. Об усреднении и исследовании на устойчивость в многочастотных системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики.— М.: Наука, 1977, с. 298—307.
4. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике.— М.: Наука, 1971.— 442 с.
5. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике.— М.: Наука, 1978.— 126 с.
6. Попова Н. И. Об усреднении по быстрым переменным в многочастотных системах, допускающих резонансы: Препринт ИТЭФ № 70, М., 1977, с. 1—30.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
24.I 1980 г.