УДК 517.2

П. П. Козак, Р. Н. Кадобянский

Представление решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений в виде интегралов по винеровой мере

Связям интегрирования в функциональных пространствах с различными задачами анализа посвящено значительное количество работ. С историей и подробной библиографией вопроса можно ознакомиться по обзорной статье Ю. Л. Далецкого [1]. Настоящая статья посвящена решению систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с помощью интегрирования по винеровой мере.

Введем некоторые определения и обозначения.

Пусть $C_{0m}^n = C_{0m} \times \ldots \times C_{0m}$ $(n, m \geqslant 1)$ — n-кратное декартово произведение пространств C_{0m} действительных непрерывных функций m переменных $x(t) = x(t_1, \ldots, t_m)$, определенных на $Q_m = Q \times \ldots \times Q$, $Q \equiv [0, 1]$, и таких, что $x(t)|_{t_p=0} = 0$ $(p = \overline{1, m})$. Пространство C_{01} обозначим C_0.

Введем сокращенные обозначения для частных производных и интегралов от функций многих переменных:

$$\frac{\partial^{lm} y(t)}{\partial t_1^l \ldots \partial t_m^l} = \partial^{lm} y(t) \quad (l \geqslant 1), \quad \frac{\partial^{\sum_{p=1}^m n_p} y(t)}{\partial t_1^{n_1} \ldots \partial t_m^{n_m}} \equiv \partial^{\sum_{p=1}^m n_p} y(t) \quad (n_p \geqslant 1, \ p = \overline{1, m}),$$

$$\int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_m} y(s_1, \ldots, s_m)\, ds_1 \ldots ds_m \equiv \int_0^t y(s)\, ds.$$

Определим следующие подмножества пространства C_{0m}: $C_{0m} \supset \widetilde{C}_{0m}^{(l)} = \{x(t),\ t \in Q_m,\ l \geqslant 1 : \partial^{ml'} x(t)$ — абсолютно непрерывна на Q_m, $\partial^{ml'} x(t) \in C_{0m}$ $(0 \leqslant l' \leqslant l-1)$, $\partial^{ml} x(t) \in L^2(Q_m)\}$, и $C_{0m} \supset C_{0m}^{(n_1 \ldots n_m)} \equiv \{x(t),\ t \in Q_m,\ n_p \geqslant 1,$ $p = \overline{1, m}$: $\partial^{\sum_{p=1}^m k_p} x(t) \in C_{0m},\ 0 \leqslant k_p \leqslant n_p,\ p = \overline{1, m}\}$. В частном случае при $m, l = 1$ обозначим $\widetilde{C}_{0m}^{(1)} \equiv \widetilde{C}_{0m}$, $\widetilde{C}_{01}^{(l)} \equiv \widetilde{C}_0^{(l)}$, $\widetilde{C}_0^{(1)} \equiv \widetilde{C}_0$, $C_{01}^{(n_1)} \equiv C_0^{(n_1)}$. Кратный интеграл по C_{0m}^n, определенный в [2], обозначим

$$\int_{C_{0m}^n} F(x_1, \ldots, x_n)\, W(dx_1 \ldots dx_n).$$

«Стильтьесовы» интегралы — линейные и квадратичные функционалы на C_{0m}^n — понимаются в смысле Пэли — Винера — Зигмунда [3—5].

Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$u_i(t) + \lambda \sum_{j=1}^n \int_{Q_m} L_{ij}(t, s)\, U_j(s)\, ds = f_i(t) \ (t \in Q_m,\ i = \overline{1, n}), \tag{1}$$

и пусть выполняются следующие условия:

I. $f_i(t) \in \widetilde{C}_{0m}$ $(i = \overline{1, n})$;

II. *a*. ядра $L_{ij}(t, s)$ $(i, j) = \overline{1, n})$ определены на $Q_m \times Q_m \equiv Q_m^2$ и представимы в виде

$$L_{ij}(t, s) = L_{ij}^{*}(t, s) \prod_{p=1}^{m} \theta(t_p - s_p) + L_{ij}^{**}(t, s) \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

где θ — единичная функция Хевисайда, причем $L_{ij}^{*}(t, s)$ и $L_{ij}^{**}(t, s)$ $(i, j = \overline{1, n})$ непрерывны соответственно на $\overline{\Delta}$ и $Q_m^2 \setminus \Delta$, $\Delta \equiv \{0 \leqslant s_p < t_p \leqslant 1, p = \overline{1, m}\}$; кроме того, $\forall s \in Q_m$: $L_{ij}^{**}(t, s)|_{t_p=0} \equiv 0$ $(p = \overline{1, m})$, $L_{ij}^{*}(t, s)$, $L_{ij}^{**}(t, s)$ $(i, j = \overline{1, n})$ — абсолютно непрерывны по t, и $\partial_t^m L_{ij}^{*}(t, s) \in L^2(\Delta)$, $\partial_t^m L_{ij}^{**}(t, s) \in L^2(Q_m^2)$.

II. *b*. λ не является характеристическим числом интегрального оператора Фредгольма с матрицей ядер $L_{ij}(t, s)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Тогда, повторяя с небольшими изменениями доказательство теоремы 1 из [2], приведенное для непрерывных ядер, получает представление единственного решения системы (1) $u_i(t) \in C_{0m}$ $(i = \overline{1, n})$ в виде

$$u_i(t) = |D_{\lambda L}| \int\limits_{C_{0m}^n} x_i(t)\, \rho(\lambda L, f;\ x_1, \ldots, x_n)\, W(dx_1 \ldots dx_n) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{2}$$

где $|D_{\lambda L}|\, \rho(\lambda L, f;\ x_1, \ldots, x_n) \equiv \rho_n(\lambda L, f;\ x_1, \ldots, x_n)$ — плотность меры, соответствующей суперпозиции линейного преобразования и сдвига в пространстве C_{0m}^n;

$$\rho(\lambda L, f;\ x_1, \ldots, x_n) = \exp\Biggl\{2 \sum_{i=1}^{n} \Biggl[\int\limits_{Q_m} \partial^m f_i(t)\, dx_i(t) - \int\limits_{Q_m} (\partial^m f_i(t))^2 dt\Biggr] -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \Biggl[\int\limits_{Q_m^2} \Biggl(2\lambda \widetilde{L}_{ij}(t, s) + \lambda^2 \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{Q_m} \widetilde{L}_{li}(u, t)\, \widetilde{L}_{lj}(u, s)\, du\Biggr) dx_i(t)\, dx_j(s) +$$

$$+ 2\lambda \int\limits_{Q_m} \Biggl(\int\limits_{Q_m} \widetilde{L}_{ij}(t, s)\, \partial^m f_i(t)\, dt\Biggr) dx_j(s)\Biggr]\Biggr\}; \tag{3}$$

$$\widetilde{L}_{ij}(t, s) = \partial_t^m \int\limits_{s}^{1} L_{ij}(t, u)\, du \quad (i, j = \overline{1, n}); \tag{4}$$

$$|D_{\lambda L}|^{-1} = \int\limits_{C_{0m}^n} \rho(\lambda L, 0;\ x_1, \ldots, x_n)\, W(dx_1 \ldots dx_n) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu = 1}^{n} \int\limits_{Q_m} \overset{(\nu)}{\cdots} \int\limits_{Q_m} \det \| L'_{l_i l_j}(t^i, t^j) \|_{i,j=1}^{\nu} \prod_{k=1}^{\nu} dt^k \tag{5}$$

— детерминант Фредгольма матрицы ядер $L'_{ij}(t, s)$ $(i, j = \overline{1, n})$, элементы которой отличаются от функций $L_{ij}(t, s)$ $(i, j = \overline{1, n})$ значениями на «диагоналях» $t_p = s_p$ $(p = \overline{1, m})$:

$$L'_{ij}(t, s) = \begin{cases} L_{ij}(t, s) \text{ на } Q_m^2 \setminus \{0 \leqslant s_p = t_p \leqslant 1;\quad p = \overline{1, m}\}, \\ \dfrac{1}{2}[L_{ij}(t, t+) + L_{ij}(t, t-)] \text{ на } \{0 \leqslant s_p = t_p \leqslant 1;\ p = \overline{1, m}\} \end{cases} (i, j = \overline{1, n}). \tag{6}$$

Для системы уравнений (1) типа Вольтерра $(L_{ij}^{**}(t,s)\equiv 0\ (i,j=\overline{1,n})$ условие II.b. может быть опущено, поскольку оператор Вольтерра не имеет собственных значений, а в формулы (2)—(5) следует внести очевидные изменения.

1. Системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений вольтеррового типа. Рассмотрим задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений вида

$$y_i^{(n_i)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_j}a_{ij}^k(t)\,y_j^{(n_j-k)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n'_j}\int_0^t A_{ij}^k(t,s)\,y_i^{(n'_i-k)}(s)\,ds=f_i(t)\tag{1.1}$$

$$(t\in Q,\ i=\overline{1,n},\ n\geqslant 1,\ n_i,\ n'_i\geqslant 0),$$

$$y_i^{(k)}(0)=0\ \ (i=\overline{1,n},\ k=\overline{0,\max(n_i,n'_i)-1}).\tag{1.2}$$

Не уменьшая общности, будем считать $n_i<n'_i$ $(i=\overline{1,n_0},\ 0\leqslant n_0\leqslant n)$, $n_i\geqslant n'_i$ $(i=\overline{n_0+1,n})$, $A_{ii}^0(t,s)\not\equiv 0$ $(i=\overline{1,n_0})$. Имеет место теорема.

Теорема 1.1. *Пусть*

(*i*) $f_i(t)\in\widetilde{C}_0^{(2)}$ $(i=\overline{1,n_0})$, $\quad f_i(t)\in\widetilde{C}_0$ $(i=\overline{n_0+1,n})$;

(*ii*) $a_{ij}^k(t)\in\widetilde{C}^{(2)}(Q)$ $(i=\overline{\ ,n_0},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,n_j})$;

$a_{ij}^k(t)\in\widetilde{C}(Q)$ $(i=\overline{n_0+1,n},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,n_j})$; $\quad A_{ij}^k(t,s)\in C(\Delta)$

$$(i,j=\overline{1,n},\ k=\overline{0,n'_j}),$$

и существуют производные

$$\frac{\partial A_{ij}^k(t,s)}{\partial t}\in C(\Delta),\qquad \frac{\partial^2 A_{ij}^k(t,s)}{\partial t^2}\in L^2(\Delta),$$

$$\frac{d}{dt}A_{ij}^k(t,t)\in L^2(Q)\quad (i=\overline{1,n_0},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{0,n'_j}),$$

$$\frac{\partial A_{ij}^k(t,s)}{\partial t}\in L^2(\Delta)\quad (i=\overline{n_0+1,n},\ j=\overline{1,n},\quad k=\overline{0,n'_j})$$

$$\forall t\in Q:\ \det\|M_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n\neq 0,$$

где

$$M_{ij}(t)=\begin{cases}A_{ij}^0(t,t)+\delta_{ij}\delta_{n'_i;n_i+1}, & i=\overline{1,n_0},\ j=\overline{1,n},\\ \delta_{ij}, & i=\overline{n_0+1,n},\ j=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Тогда единственное решение задачи (1.1), (1.2) *можно представить в виде*

$$y_i(t)=\int_0^1\frac{(t-s)^{\max(n_i,n'_i)-1}}{[\max(n_i,n'_i)-1]!}\ u_i(s)\,ds\quad (i=\overline{1,n}),\tag{1.3}$$

$$u_i(t)=D_{\mathfrak{A}}\int_{C_0^n}x_i(t)\,\rho(\mathfrak{A},h;\ x_1,\ldots,x_n)\,W(dx_1\ldots dx_n)\qquad (i=\overline{1,n}),\tag{1.4}$$

где

$$\mathfrak{A}_{ij}(t,s)=\sum_{l=1}^{n}[M^{-1}(t)]_{il}A_{lj}^{**}(t,s)\ \ ((t,s)\in\Delta,\ i,j=\overline{1,n}),\tag{1.5}$$

$$A_{ij}^{**}(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\partial A_{ij}^{*}(t,s)}{\partial t}, & i=\overline{1,n_0},\ j=\overline{1,n},\\ A_{ij}^{*}(t,s), & i=\overline{n_0+1,n},\ j=\overline{1,n},\ (t,s)\in\Delta,\end{cases}\tag{1.6}$$

$$A_{ij}^{*}(t,s)=A_{ij}^{0}(t,s)+\frac{(t-s)^{n_i'-n_i-1}}{(n_i'-n_i-1)!}\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{n_j}a_{ij}^{k}(t)\frac{(t-s)^{n_j'-n_j+k-1}}{(n_j'-n_j+k-1)!}+$$

$$+\sum_{k-1}^{n_j'}\int_s^t A_{ij}^{k}(t,p)\frac{(p-s)^{k-1}}{(k-1)!}\,dp\ \ (i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n_0}),\tag{1.7}$$

$$A_{ij}^{*}(t,s)=A_{ij}^{0}(t,s)\,\delta_{n_j';n_j}+\sum_{k=1}^{n_j}a_{ij}^{k}(t)\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}+(1-\delta_{n_j;n_j'})\int_s^t A_{ij}^{0}(t,p)\times$$

$$\times\frac{(p-s)^{n_j-n_j'-1}}{(n_j-n_j'-1)!}\,dp+\sum_{k=1}^{n_j'}\int_s^t A_{ij}^{k}(t,p)\frac{(p-s)^{n_j-n_j'+k-1}}{(n_j-n_j'+k-1)!}\,dp\ \ (i=\overline{1,n},$$

$$j=\overline{n_0+1,n}),\quad (t,s)\in\Delta,\tag{1.8}$$

$$D_{\mathfrak{A}}=\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{Q}\left[\sum_{i=1}^{n_0}(M^{-1}(t))_{ij}\left(a_{j1}^{1}(t)\,\delta_{n_i';n_i+1}+A_{j1}^{1}(t,t)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial A_{ji}(t,s)}{\partial t}\bigg|_{s=t}\right)+\sum_{i=n_0+1}^{n}((M^{-1}(t))_{ij}(a_{j1}^{1}(t)+A_{j1}^{0}(t,t)\,\delta_{n_j';n_j})\right]dt\right\},\tag{1.9}$$

$$h_i(t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}[M^{-1}(t)]_{ij}\frac{df_j(t)}{dt}, & i=\overline{1,n_0},\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}[M^{-1}(t)]_{ij}f_j(t), & i=\overline{n_0+1,n}.\end{cases}\tag{1.10}$$

Доказательство. Введем функции

$$u_i(t)=y_i^{(\max(n_i,n_i'))}(t)\quad (i=\overline{1,n}).\tag{1.11}$$

Учитывая начальные условия, выразим младшие производные по формуле Коши через $u_i(t)$ ($i=\overline{1,n}$) и подставим их вместе с (1.11) в систему уравнений (1.1), которая примет вид

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_0^t A_{ij}^{*}(t,s)\,u_j(s)\,ds=f_i(t), & i=\overline{1,n_0},\\ \displaystyle u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t A_{ij}^{*}(t,s)\,u_j(s)\,ds=f_i(t), & i=\overline{n_0+1,n},\end{cases}\tag{1.12}$$

а ядра $A_{ij}^{*}(t,s)$ $(i,j=\overline{1,n})$ определяются выражениями (1.8), (1.9).

Продифференцируем первые n_0 уравнений системы (1.12) (это позволяют сделать условия теоремы) и введем матрицы $M(t)=\|M_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n}$,

$A^{**}(t,s)=\| A_{ij}^{**}(t,s)\|_{i,j=1}^{n}$, определенные формулами (1.6), (1.7). Система запишется в виде

$$M(t)\,u(t)+\int_0^t A^{**}(t,s)\,u(s)\,ds=g(t), \tag{1.13}$$

где $u(t)$, $g(t)$ — вектор-функции, а

$$g_i(t)=\begin{cases}\dfrac{df_i(t)}{dt}, & i=\overline{1,n_0},\\ f_i(t), & i=\overline{n_0+1,n}.\end{cases} \tag{1.14}$$

По условию теоремы существует обратная матрица $M^{-1}(t)$. Умножая уравнение (1.13) слева на $M^{-1}(t)$, получаем

$$u(t)+\int_0^t \mathfrak{A}(t,s)\,u(s)\,ds=h(t), \tag{1.15}$$

где $\mathfrak{A}(t,s)$ и $h(t)$ определены формулами (1.5)—(1.8), (1.10).

Легко убедиться, что из условий теоремы следует выполнение условий (I), (II.a) для $h(t)$ и $\mathfrak{A}(t,s)$. Следовательно, существует единственное непрерывное решение системы (1.15), представимое в виде (1.4). Учитывая, что $y_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ выражаются по формуле Коши (1.3) через $u_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$, завершаем доказательство теоремы.

Следует заметить, что задачу Коши для системы (1.1) с произвольными начальными условиями и свободными членами $f_i(t)\in\widetilde{C}^{(2)}(Q)$ $(i=\overline{1,n_0})$, $f_i(t)\in\widetilde{C}(Q)$ $(i=\overline{n_0+1,n})$ можно свести к рассмотренной выше, если выполняется дополнительное условие $\det\|\delta_{ii}+A_{ij}^{n_j'-n_j-1}(0,0)\|_{i,j=1}^{n_0}\neq 0$.

2. Системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений фредгольмового типа. Рассмотрим задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений вида

$$y_i^{(n_i)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_j}a_{ij}^k(t)\,y_j^{(n_j-k)}(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n_j}\int_Q A_{ij}^k(t,s)\,y_j^{(n_j-k)}(s)\,ds=f_i(t) \tag{2.1}$$

$$(t\in Q,\ i=\overline{1,n}),$$

$$y_i^{(k)}(0)=0\quad (i=\overline{1,n},\ k=\overline{0,n_i-1}). \tag{2.2}$$

В этом случае справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Пусть*

(*i*) $f_i(t)\in\widetilde{C}_0$ $(i=\overline{1,n})$,

(*ii*) $a_{ij}^k(t)\in\widetilde{C}_0$ $(i,j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,n_j})$,

(*iii*) $A_{ij}^k(t,s^2)$ $(i,j=\overline{1,n})$ *удовлетворяют условиям* (*II. a*);

(*iy*) λ *не является характеристическим числом оператора Фредгольма с матрицей ядер*

$$\mathfrak{A}_{ij}(t,s)=\mathfrak{A}_{ij}^{*}(t,s)\,\theta(t-s)+\mathfrak{A}_{ii}^{**}(t,s)\ \ (i,j=\overline{1,n}), \tag{2.3}$$

где

$$\mathfrak{A}_{ij}^{*}(t,s)=\lambda^{-1}\sum_{k=1}^{n_j}a_{ij}^k(t)\,\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\ \ (i,j=\overline{1,n}), \tag{2.4}$$

$$\mathfrak{A}_{ij}^{**}(t,s)=A_{ij}^0(t,s)+\sum_{k=1}^{n_j}\frac{1}{(k-1)!}\int_s^1 A_{ij}^k(t,v)(v-s)^{k-1}dv\quad (i,j=\overline{1,n}).\quad (2.5)$$

Тогда единственное решение задачи (2.1), (2.2) $y_i(t)\in C_0^{(n_i)}$ $(i=\overline{1,n})$ *представляется в виде*

$$y_i(t)=\frac{1}{(n_i-1)!}\int_0^t (t-s)^{n_i-1}u_i(s)\,ds\quad (i=\overline{1,n}),\quad (2.6)$$

где

$$u_i(t)=|D_{\lambda\mathfrak{A}}|\int_{C_0^n} x_i(t)\,\rho(\lambda\mathfrak{A},f;\ x_1,\dots,x_n)\,W(dx_1\dots dx_n)\quad (i=\overline{1,n}).\quad (2.7)$$

Доказательство. Введя замену

$$y_i^{(n_i)}(t)=u_i(t)\quad (i=\overline{1,n}).\quad (2.8)$$

и повторяя рассуждения п. 1, получаем систему интегральных уравнений

$$u_i(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_Q \mathfrak{A}_{ij}(t,s)\,u_j(s)\,ds=f_i(t)\quad (i=\overline{1,n})\quad (2.9)$$

с ядрами, определенными выражениями (2.3)—(2.5). Из условий теоремы 2.1 следует выполнение условий II.a, b для функций $\mathfrak{A}_{ij}$ (t,s) $(i,j=\overline{1,n})$. Поскольку (i) совпадает с (1), то u_i (t) $(i=\overline{1,\ n})$ представимо в виде (2.7), а из (2.8) следует (2.6), что и завершает доказательство теоремы.

В том случае, когда начальные условия не нулевые, задача приводится к виду (2.1), (2.2) с помощью элементарной замены. Одновременно можно ослабить условие (i), заменив его на f_i $(t)\in\tilde{C}$ (Q).

3. Краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений. Рассмотрим краевую задачу вида

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{l}a_{ij}^k(t)\,y_j^{(l-k)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_Q A_{ij}(t,s)\,y_j(s)\,ds=\lambda y_i(t)+f_i(t)$$

$$(i=\overline{1,n},\ n,l\geqslant 1),\quad (3.1)$$

$$\begin{cases} y_i(0)=0,\\ \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{ij}^{pk}y_j^{(k)}(0)+\sum_{k=0}^{l-1}\beta_{ij}^{pk}y_j^{(k)}(1)\right]=0\quad (i=\overline{1,n},\ p=\overline{1,l-1}).\end{cases}\quad (3.2)$$

Задачу (3.1), (3.2) можно записать в виде

$$Ly+Ay=\lambda y+f,\quad (3.1)$$

где L — дифференциальный оператор, порожденный системой дифференциальных выражений $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{l}a_{ij}^k(t)\,y_j^{(l-k)}(t)$ $(i=\overline{1,n})$ и краевыми условиями (3.2); A — интегральный оператор, соответствующий матрице ядер $A_{ij}(t,s)$ $(i,j=\overline{1,n})$; y, f — вектор-функции. Имеет место теорема.

Теорема 3.1. *Пусть*

(i) $f_i(t)\in C(Q)$, $a_{ij}^k(t)\in C(Q)$ $\forall t\in Q$; $\det\|a_{ij}^0(t)\|\neq 0$ $(i,j=\overline{1,n},\ k=\overline{0,l})$;

(ii) $A_{ij}(t,s)$ $(i,j=\overline{1,n})$ *удовлетворяют условиям* II. a;

(iii) *существует оператор* L^{-1} *и* $G_{ij}(t,s)$ $(i,j=\overline{1,n})$ — *соответствующая матричная функция Грина*;

(*iy*) *детерминант Фредгольма матрицы ядер*

$$K_{ij}(t,s)=\sum_{l=1}^{n}\int_Q G_{il}(t,u)\,A_{lj}(u,s)\,du-\lambda G_{ij}(t,s)\quad (i,j=\overline{1,n}) \tag{3.3}$$

отличен от нуля. Тогда единственное решение задачи (3.1), (3.2) *представляется в виде*

$$y_i(t)=|D_K|\int_{C_0^n} x_i(t)\,\rho(K,g;\,x_1,\ldots,x_n)\,W(dx_1\ldots dx_n)\quad (i=\overline{1,n}), \tag{3.4}$$

где

$$g_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_Q G_{ij}(t,s)\,f_j(s)\,ds\quad (i=\overline{1,n}). \tag{3.5}$$

Доказательство. По условию (*iii*) теоремы существует оператор L^{-1} — интегральный оператор с матрицей ядер $G_{ij}(t,s)$ $(i,j=\overline{1,n})$. Из (3.1) находим: $y+Ky=g$, где $K=L^{-1}A-\lambda L^{-1}$ — интегральный оператор с матрицей ядер (3.3), $g=L^{-1}f$. Из известных свойств функции Грина $G_{ij}(t,s)$ $(i,j=\overline{1,n})$ следует выполнение условий I, II. *а* для функций $g_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ и ядер $K_{ij}(t,s)$ $(i,j=\overline{1,n})$. Учитывая (*iy*), получаем представлеиие единственного решения $y_i(t)\in C_0^{(l)}$ $(i=\overline{1,n})$ задачи (3.1), (3.2) в виде (3.4). Теорема доказана.

4. Системы линейных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными вольтеррового типа. Рассмотрим характеристическую задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\partial^{\sum\limits_{p=1}^{m} n_p^i}y_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{Q_m}A_0^{ij}(t,s)\,y_j(s)\,ds+\sum_{k_1=1}^{n_1^j}\cdots\sum_{k_m=1}^{n_m^j}\left[a_{k_1\ldots k_m}^{ij}(t)\,\partial^{\sum\limits_{p=1}^{m}(n_p^j-k_p)}y_j(t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t A_{k_1\ldots k_m}^{ij}(t,s)\,\partial^{\sum\limits_{p=1}^{m}(n_p^j-k_p)}y_j(s)\,ds\right]\right\}=f_i(t)\quad (i=\overline{1,n}) \tag{4.1}$$

с условиями на характеристиках

$$\left.\frac{\partial^{l_p^i}y_i(t)}{\partial t_p^{l_p^i}}\right|_{t_p=0}=0\ \ (l_p^i=\overline{0,n_p^i-1},\ p=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}). \tag{4.2}$$

Имеет место теорема.

Теорема 2.1. *Пусть*

(*i*) $f_i(t)\in\widetilde{C}_{0m}$ $(i=\overline{1,n})$,

(*ii*) $a_{k_1\ldots k_m}^{ij}(t)\in\widetilde{C}(Q_m)$ $(i,j=\overline{1,n},\ \ k_p=\overline{1,n_p^j},\ \ p=\overline{1,m})$,

(*iii*) $A_{k_1\ldots k_m}^{ij}(t,s)$, $A_0^{ij}(t,s)\in C(\Delta)$, $\partial_t^m A_{k_1\ldots k_m}^{ij}(t,s)$, $\partial_t^m A_0^{ij}(t,s)\in L^2(\Delta)$ $(i,j=\overline{1,n};\ k_p=\overline{1,n_p^j};\ p=\overline{1,m})$.

Тогда единственное решение задачи (2.1), (2.2) *представляется в виде*

$$y_i(t)=\int_0^t\prod_{p=1}^{m}\frac{(t_p-s_p)^{n_p^i-1}}{(n_p^i-1)!}\,u_i(s)\,ds \tag{4.3}$$

где

$$u_i(s) = D_{\mathfrak{A}} \int\limits_{C_{0m}^n} x_i(t)\,\rho(\mathfrak{A}, f;\, x_1, \ldots, x_n)\, W(dx_1 \ldots dx_n) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{4.4}$$

$$\mathfrak{A}_{ij}(t, s) = \sum_{k_1=1}^{n_1^j} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m^j} a_{k_1 \ldots k_m}^{ij}(t) \prod_{p=1}^{m} \frac{(t_p - s_p)^{k_p - 1}}{(k_p - 1)!} + A_0^{ij}(t, s) +$$

$$+ \sum_{k_1=1}^{n_1^j} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m^j} \int\limits_s^t A_{k_1 \ldots k_m}^{ij}(t, v) \prod_{p=1}^{m} \frac{(v_p - s_p)^{k_p - 1}}{(k_p - 1)!}\, dv, \quad (t, s) \in \Delta, \quad (i, j = \overline{1, n}), \tag{4.5}$$

$$D_{\mathfrak{A}} = \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_m} [A_0^{ii}(t, t) + a_{1\ldots 1}^{ii}(t)]\, dt\right\}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Произведем замену

$$u_i(t) = \partial^{\sum_{p=1}^{m} n_p^i} y_i(t) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{4.7}$$

Тогда

$$\partial^{\sum_{p=1}^{m}(n_p^i - k_p)} y_i(t) = \int\limits_0^t \prod_{p=1}^{m} \frac{(t_p - s_p)^{k_p - 1}}{(k_p - 1)!}\, u_i(s)\, ds \quad (i = \overline{1, n},\ k_p \geqslant 1,\ p = \overline{1, m}). \tag{4.8}$$

Подставляя (4.7) и (4.8) в (4.1), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода для функций $u_i(t)$

$$u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \mathfrak{A}_{ij}(t, s)\, u_j(s)\, ds = f_i(t) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{4.9}$$

где $\mathfrak{A}_{ij}(t, s)$ $(i, j = \overline{1, n})$ определяются выражениями (4.5). Из условий теоремы 4.1 следует выполнение условий I, II. а для ядер $\mathfrak{A}_{ij}(t, s)$ и свободных членов $f_i(t)$. Следовательно, система (4.9) имеет единственное решение $u_i(t) \in C_{0m}$, представимое в виде (4.4). Выражая $y_i(t)$ через $u_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ по формуле Коши (4.3), завершаем доказательство.

Характеристическая задача для системы (4.1) с ненулевыми, но достаточно гладкими условиями на характеристиках и свободными членами $f_i(t) \in \tilde{C}(Q_m)$ $(i = \overline{1, n})$ простой заменой приводится к виду (4.1), (4.2). Аналогично представимы решения системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными фредгольмового типа.

1. Далецкий Ю. Л. Интегрирование в функциональных пространствах.— В кн.: Мат. анализ, М.: 1967, с. 83—124. (Итоги науки) ВИНИТИ.
2. Козак П. П. О представлении решения характеристической задачи для одного линейного уравнения в виде континуального интеграла.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 1, с. 84—89.
3. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.— М.: Наука, 1967.— 192 с.
4. Тобиас Т. О среднеквадратичном приближении линейных функционалов.— Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, 1964, № 1. с. 70—82.
5. Paley R., Wiener N., Zygmund A. Notes on random functions.— Math., 1933, **37**, p. 647—668.

Львовский политехнический институт

Поступила в редакцию 28.IV 1979 г