УДК 519.21

И. К. Мацак

Асимптотическое поведение невозвратных случайных блужданий

1. Введение. Пусть $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ — невозвратное случайное блуждание, $MX_1 = \infty$. В этом случае

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{S_n}{n}\right| = \infty\right\} = 1.$$

Задача нахождения достаточных условий, что

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| = \infty\right\} = 1 \tag{1}$$

поставлена А. В. Скороходом.

Соответствующие критерии, даже в более общей ситуации, найдены ранее в работе [1]. Последние результаты и библиография по этому вопросу приводятся в [2]. К сожалению, проверить условие, приведенное [1] в общем случае трудно.

В настоящей работе для широких классов случайных блужданий, включающих в себя симметрические невозвратные блуждания, доказывается равенство

$$P\left\{\lim_{i\to\infty}\left|\frac{S_{k_i}}{k_i}\right| = \infty\right\} = 1, \tag{2}$$

где k_i — неслучайны, $2^i \leqslant k_i < 2^{i+1}$. Построим симметрическое невозвратное случайное блуждание, для которого не выполнено (1). Подобный пример рассматривался в [1], но методы доказательств отличаются.

2. Основные результаты. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, $F(t)$ — функция распределения величины X_1.

Теорема 1. *Если для некоторого $a > 0$*

$$\int_0^a \frac{dt}{1 - |f(t)|} < \infty, \tag{3}$$

то выполняется равенство (2).

Заметим, что условие (3) является необходимым и достаточным для невозвратности случайного блуждания с характеристической функцией $|f(t)|^2$. Если S_n — симметрическое невозвратное блуждание, то условие (3) выполнено, и из теоремы 1 следует утверждение (2) для симметрических случайных блужданий.

Теорема 2. *Пусть* $a > 0$,

$$\sup_{0<s<1} \int_0^a \operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^t - sf(t)}\right) dt < \infty, \tag{4}$$

тогда для любого $c > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{|S_n| < cn\} < \infty$.

Следствие 1. *Если выполнено условие* (4), *то для любого конечного* c *существует неслучайная последовательность* k_i, $2^i \leqslant k_i < 2^{i+1}$ *такая, что*

$$P\left\{\varliminf_{i\to\infty}\left|\frac{S_{k_i}}{k_i}\right| \geqslant c\right\} = 1.$$

Отметим, что (4) следует из (3), т. е. оно выполняется, если симметризованное случайное блуждание $S_n^c = S_n - S_n'$ невозвратно.

Положим

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad N(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[-cn,cn]}(S_n).$$

Теорема 3. *Если* $a > 0$,

$$\sup_{0<s<1} \int_0^a \operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^t - sf(t)}\right)^2 dt < \infty, \tag{5}$$

то для любого $c > 0$

$$MN(c) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_n| < cn\} < \infty.$$

Условие теоремы 3 выполнено, если $\int_0^a \frac{dt}{(1 - |f(t)|)^2} < \infty$.

Следующий результат получен в работе [1] (см. также [3]). В этой статье предложено новое краткое доказательство теоремы Кестена, использующее некоторые факты о лестничных моментах.

Теорема 4 [1]. *Если* $P\{\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\} = 1$, $M|X_1| = \infty$, *то* $P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\right\} = 1$.

3. Доказательство теоремы 1.

Лемма 1. *Если выполнено условие* (3), *то для любой функции* $\varphi(n) \geqslant 1$, *любого* $c > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} \sup_{-\infty<x<+\infty} P\left\{\frac{|S_n + x|}{n\varphi(n)} < c\right\} < \infty. \tag{6}$$

Естественно, что представляет интерес только случай $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} = \infty$. Доказательство леммы 1 проводится по аналогии с доказательством критерия возвратности [4, гл. 18, §7]. Пусть $G = \{G_n, n \geqslant 1\}$ — произвольная неслучайная последовательность. Положим для $s \in (0, 1)$

$$U_s(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n\varphi(n)} P\left\{\frac{S_n + G_n}{n\varphi(n)} \in I\right\}.$$

Условие (6) будет выполнено, если мера $U_s(I)$ остается ограниченной по s, G для любого интервала $I = [-c, c]$. Применим равенство Парсеваля к функции распределения $P\left\{\frac{S_n + G_n}{n\varphi(n)} \in I\right\}$ и плотности

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{a^2x^2} P\left\{\frac{S_n + G_n}{n\varphi(n)} \in dx\right\} = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{|t|}{a}\right) f^n\left(\frac{t}{n\varphi(n)}\right) e^{itG_n} dt.$$

Следовательно,

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{a^2x^2} U_s(dx) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{|t|}{a}\right)\frac{s^n}{n\varphi(n)}\left|f\left(\frac{t}{n\varphi(n)}\right)\right|^n dt =$$

$$= \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{a}{n\varphi(n)}}\left(1 - \frac{n\varphi(n)\,t}{a}\right) s^n |f(t)|^n dt \leqslant \frac{2}{a}\int_{0}^{a}\frac{dt}{1 - |f(t)|} < \infty.$$

Переход к интегрированию по положительной оси справедлив, так как $|f(t)|$ четная функция. Пусть $I = \left\{|x| < \frac{2}{a}\right\}$, тогда при $x \in I$ $\frac{1 - \cos ax}{a^2x^2} > \frac{1}{3}$ и, с едовательно, $U_s(I)$ ограничено.

Лемма 2. *Пусть* $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$, *тогда существует последовательность* k_i *такая, что* $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} < \infty$, $2^i \leqslant k_i < 2^{i+1}$.

Доказательство. Пусть $b_n = a_n/n$ и существует k_i, такая что $2^i \leqslant k_i < 2^{i+1}$, $b_{k_i} = \min\limits_{2^i \leqslant n < 2^{i+1}} b_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i b_{k_i} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i+1} b_{k_i} \leqslant 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=2^i}^{2^{i+1}-1}\frac{a_n}{n} < \infty.$$

Перейдем собственно к доказательству теоремы 1. В силу леммы 1 для $\varphi(n) \equiv 1$, любого $c > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sup_{-\infty < x < +\infty} P\left\{\frac{|S_n + x|}{n} < c\right\} < \infty.$$

Положим $a_n = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} P\left\{\frac{|S_n + x|}{n} < c\right\}$. Тогда из леммы 2 следует, что существует последовательность k_i такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} P\left\{\frac{|S_{k_i} + x|}{k_i} < c\right\} < \infty, \quad 2^i \leqslant k_i < 2^{i+1}.$$

Если m_i — произвольная последовательность, $2^i \leqslant m_i < 2^{i+1}$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{S_{m_i}}{m_i}\right| < c\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\left\{\frac{\left|S_{k_i} + \sum\limits_{j=k_{i-1}+1}^{m_i} X_j\right|}{m_i} < c\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} P\left\{\frac{|S_{k_{i-1}} + x|}{k_{i-1}} < 4c\right\} < \infty.$$

Справедливость неравенств ясна, так как $m_i \leqslant 4k_{i-1}$, а величины $S_{k_{i-1}}$ и $\sum\limits_{j=1+k_{i-1}}^{m_i} X_j$ независимы. Применение леммы Бореля — Кантелли приводит к равенству

$$P\left\{\lim_{i\to\infty}\left|\frac{S_{m_i}}{m_i}\right| \geqslant c\right\} = 1. \tag{7}$$

Величина c в (7) произвольна, поэтому получаем (2).

4. Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству леммы 1. Отличие состоит в том, что равенство Парсеваля применяется к плотности $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, характеристическая функция которой $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Покажем ограниченность по $s \in (0, 1)$ меры $U_s(I) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P\left\{\frac{S_n}{n} \in I\right\}$ для любого конечного интервала I. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} P\left\{\frac{S_n}{n} \in dx\right\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} f^n\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_s(dx)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\frac{s^n}{n} f^n\left(\frac{x}{n}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|x|} s^n f^n(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x|} s f(x)}{1 - e^{-|x|} s f(x)}\, dx.$$

Не трудно видеть, что подынтегральное выражение в последнем интеграле ограничено по абсолютной величине на бесконечности величиной $2e^{-|x|}$, и поэтому неограниченным этот интеграл может быть только в точке 0. Но ограниченность выражения

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{Re}\, \frac{e^{-|x|} s f(x)}{1 - e^{|x|} s f(x)}\, dx$$

эквивалентна условию (4). При $|x| \leqslant b \; \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{1+b^2}$. Отсюда имеем, что $U_s(I)$ ограничено для любого конечного интервала I.

Справедливость следствия 1 вытекает из теоремы 2 и леммы 2. Для доказательства теоремы 3 достаточно применить рассуждения теоремы 2 и заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|x|} s^n f^n(x)\,dx = s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|x|} s^n f^n(x)\,dx \right].$$

Возможность дифференцирования под знаком суммы следует из равномерной сходимости по s соответствующих рядов на любом отрезке $[a, b] \subset (0, 1)$.

5. Доказательство теоремы 4. Рассмотрим последовательность верхних лестничных точек $(\tau_1 + \ldots + \tau_k,\ H_1 + \ldots + H_k)$, $k \geqslant 1$, блуждания S_n. Определение и используемые ниже свойства величин τ_k, H_k можно найти в работе [4, гл. 12]. Из условий теоремы следует, что $M\tau_1 < \infty$ [4, с. 483] и $MH_1 = +\infty$ [4, с. 464]. Допустим, что $c \geqslant 0$, $P\left\{\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = c < \infty\right\} = 1$. Пусть $S_{n,a} = \sum_{k=1}^{n} (X_k - a)$, $a > c$. Тогда ясно, что с вероятностью 1

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_{n,a}}{n} = +\infty, \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{S_{n,a}}{n} = c - a < 0. \tag{8}$$

Верхние лестничные точки блуждания $S_{n,a}$ принадлежат множеству $(\tau_1 + \ldots + \tau_k,\ H_1 - a\tau_1 + \ldots + H_k - a\tau_k)$, $k \geqslant 1$.

Если $\tau_{1,a}$ — первый лестничный момент блуждания $S_{n,a}$, то $\tau_{1,a} = \tau_1 + \ldots + \tau_k$ тогда и только тогда когда $S^*_{1,a} < 0, \ldots, S^*_{k-1,a} < 0$, $S^*_{k,a} \geqslant 0$, где $S^*_{n,a} = \sum_{k=1}^{n} (H_k - a\tau_k)$. Следовательно, $\tau_{1,a} = \tau_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \tau_k \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{[-\infty,0)}(S^*_{i,a})$.

Если $\tau^*_{1,a}$ — первый лестничный момент блуждания $S^*_{n,a}$, то $M\tau^*_{1,a} < \infty$, так как $\lim_{n\to\infty} S^*_{n,a} = +\infty$. Тогда имеем $M\tau_{1,a} = M\tau_1 \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} P\{S^*_{1,a} < 0, \ldots, S^*_{k-1,a} < 0\}\right) = M\tau_1 M\tau^*_{1,a} < \infty$.

Отсюда немедленно следует, что $\lim_{n\to\infty} S_{n,a} = +\infty$, т. е. пришли к противоречию с условием (8).

6. Примеры [5]. Пусть характеристическая функция X_1 $f(t) = b \sum_{n=2}^{\infty} \cos nt/n^2 \log n$. Тогда $f'(0) = 0$, $M|X_1| = \infty$. Если $S_{n,c} = \sum_{k=1}^{n} (X_k + c)$, то $S_{n,0}$ — возвратное, а $S_{n,c}$, $c \neq 0$, — невозвратное блуждания. Отсюда ясно, что $P\left\{\varliminf_{n\to\infty} \frac{|S_{n,c}|}{n} \leqslant |c|\right\} = 1$, т. е. (1) не выполнено.

Все устойчивые распределения с показателем $\alpha < 1$ удовлетворяют условию (3), а с показателем $\alpha < \frac{1}{2}$ — условию (5). Ассиметрическое устойчивое распределение с показателем $\alpha = 1$, $\beta = +1$ дает пример невозвратного случайного блуждания, удовлетворяющего условию теоремы 4, следовательно, выполнено (1).

Построим пример симметрического невозвратного блуждания, для которого (1) не выполняется. Положим $f(t) = 1 - t \ln^2 t$ при $t \in (0, a)$, $f(0) = 1$. Если a достаточно мало, то $f(t)$ выпуклая вниз функция на $(0, a)$. Доопределим ее на $[a, +\infty)$ так, чтобы она осталась выпуклой и $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Для $t<0$ положим $f(t)=f(|t|)$. Тогда по критерию Пойа $f(t)$ — характеристическая функция. Пусть $S_0=0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ — случайное блуждание с характеристической функцией $f(t)$. Нетрудно видеть, что условие (3) выполнено, и поэтому S_n симметрическое невозвратное блуждание, $M|X_1|=\infty$. Положим $a_n=n\ln^2 n$. Тогда для любого $t>0$, $n\to\infty$ $n\left(f\left(\frac{t}{a_n}\right)-1\right)=$ $=\frac{-nt}{a_n}\ln^2 a_n\to -t$. Согласно [4, гл. 17, § 5], в этих условиях $f(t)$ принадлежит области притяжения устойчивого распределения с показателем $\alpha=1$ и

$$P\{|X_1|>n\}\frac{n}{\ln^2 n}\to 1,\quad n\to\infty, \tag{9}$$

$$P\left\{\frac{S_n}{n\ln^2 n}\in B\right\}\to\frac{1}{\pi}\int\limits_{B}\frac{dz}{z^2+1},\quad n\to\infty. \tag{10}$$

Пусть $E_n=\{|S_{n-1}|\leqslant(n-1)c,\ |X_n|>4nc\}$, $L_1(N)=\sum_{n=2}^{N}P\{E_n\}$, $L_2(N)=$ $=\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=2}^{N}P\{E_nE_m\}$. Покажем, что

$$L_2(N)\asymp L_1^2(N)\asymp\ln^2 N, \tag{11}$$

где соотношение $a_n\asymp b_n$ означает, что

$$0<\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty.$$

Из (11) следует, что $P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right\}>0$ [6, с. 370]. Тогда для любого $c>0$ $P\left\{\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right|<c\right\}>0$. Применение закона 0 и 1 Колмогорова дает следующее равенство: $P\left\{\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right|=0\right\}=1$, т. е. (1) не выполняется.

Докажем справедливость соотношения (11). Положим

$$L_3(N)=\sum_{n=2}^{N}\sum_{1\leqslant m<\frac{n}{\ln^2 n}}P\{E_nE_{n+m}\},\quad L_4(N)=\sum_{n=2}^{N}\sum_{\frac{n}{\ln^2 n}\leqslant m<n}P\{E_nE_{n+m}\},$$

$$L_5(N)=\sum_{n=2}^{\left[\frac{1}{2}N\right]}\sum_{m=n}^{N-n}P\{E_nE_{n+m}\}.$$

Из определения ясно, что $L_2(N)=L_1(N)+2(L_3(N)+L_4(N)+L_5(N))$. Из (9), (10) имеем $L_1(N)\asymp\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}\asymp\ln N$.

Для $m\leqslant n$ справедливо следующее включение $\{|S_{n-1}|\leqslant(n-1)c,$ $|X_n|>4nc,\ |S_{n+m-1}|\leqslant(n+m-1)c\}\subset\Big\{|S_{n-1}|\leqslant(n-1)c,\ |X_n|>4nc,$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} X_k\right| > nc\bigg\}$. Отсюда, учитывая (9), (10), получаем при $N \to \infty$

$$L_3(N) \leqslant \sum_{n=2}^{N} P\{|S_{n-1}| \leqslant (n-1)c\} P^2\{|X_1| > 4nc\} \sum_{1<m\leqslant \frac{n}{\ln^2 n}} P\{|S_m| > nc\} \asymp$$

$$\asymp \sum_{n=2}^{N} \frac{\ln^2 n}{n^2} \sum_{1<m\leqslant \frac{n}{\ln^2 n}} \frac{m \ln^2 m}{n} \asymp \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \asymp \ln N.$$

Используя елементарное неравенство

$$\int\limits_{|z+x|<y} \frac{dz}{z^2+1} \leqslant \int\limits_{|z|<y} \frac{dz}{z^2+1}, \tag{12}$$

из (9), (10) получаем

$$L_4(N) \asymp \sum_{n=2}^{N} \sum_{\frac{n}{\ln^2 n}\leqslant m<n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P\{|S_{n-1}| < (n-1)c,\ |X_n| > 4nc,$$

$$S_n = dx,\ |X_{n+m}| > 4nc\} P\{|S_{m-1}+x| < 2nc\} \asymp \sum_{n=2}^{N} \frac{\ln^2 n}{n^2} \times$$

$$\times \sum_{\frac{n}{\ln^2 n}\leqslant m<n} \frac{n}{m \ln^2 m} \asymp \sum_{n=2}^{N} \frac{\ln \ln n}{n} \asymp \ln \ln N \ln N,$$

$$L_5(N) \asymp \sum_{n=2}^{\left[\frac{1}{2}N\right]} \sum_{m=n}^{N-n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P\{S_{n-1}| \leqslant (n-1)c,\ |X_n| > 4nc,\ S_n = dx\} \times$$

$$\times P\{|S_{m-1}+x| < 2mc,\ |X_m| > 4mc\} \asymp \sum_{n=2}^{\left[\frac{1}{2}N\right]} \sum_{m=n}^{N-n} \frac{1}{m \cdot n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=2}^{N} \frac{1}{m} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n} \asymp \ln^2 N,$$

что и доказывает (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kesten H. The limit points of a normalized random walk.— Ann. Math. Stat., 1970, 41, № 4, p. 1173—1205.
2. Erickson K. B. Recurrence sets of normed random walk in R^d.— Ann. Probab., 1976, 4, № 5, p. 802—828.
3. Tanny D. A new proof of Kestens theorem on the growth of the sum of independent and identically distributed random variables.— Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1977, 39, № 3, p. 231—234.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1967. Т. 2.— 752 с.
5. Лоэв М. Теория вероятностей.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 719 с.
6. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания.— М.: Мир, 1969.— 472 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
2.XI 1979 г.