УДК 517.5

Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун

Об оценке погрешности сплайн-интерполяции в интегральной метрике

Пусть $S_r(\Delta_N)$ — линейное многообразие полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 по фиксированному разбиению

$$\Delta_N : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1, \qquad (1)$$

$Q_r = \{0, 1, 2, \ldots, r\}$, I_j^r $(j = 0, 1)$ — некоторые подмножества Q_r, $l(I_j^r)$ — количество элементов в I_j^r. Задав еще одно разбиение

$$\Delta_L : 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{L-1} < \tau_L = 1, \qquad (2)$$

будем говорить, что множество $S_r(\Delta_N)$ интерполирует в точках τ_i $(i = 1, 2, \ldots, L-1)$ при краевых условиях $I = (I_0^r, I_1^r)$, если для любой функции $f \in C^r[0, 1]$ существует в $S_r(\Delta_N)$ единственный сплайн $\sigma(f, t) = \sigma(f, \Delta_N, I, t)$, удовлетворяющий условиям $\sigma(f, \tau_i) = f(\tau_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, L-1)$, $\sigma^{(\nu)}(f, 0) = f(0)$ $(\nu \in I_0^r)$, $\sigma^{(\nu)}(f, 1) = f(1)$ $(\nu \in I_1^r)$.

Заметим, что под $\sigma^{(r)}(f, 0)$ и $\sigma^{(r)}(f, 1)$ понимается соответственно $\sigma^{(r)}(f, 0+0)$ и $\sigma^{(r)}(f, 1-0)$. Условия, при которых $S_r(\Delta_N)$ интерполирует, описаны в работе [1]. Краевые условия $J = (J_0^r, J_1^r)$ будем называть дополнительными к $I = (I_0^r, I_1^r)$, если J_j^r $(j = 0, 1)$ состоит из тех и только тех элементов ν множества Q_r, для которых $r - \nu$ не принадлежит I_j^r. Ясно, что $l(I_j^r) + l(J_j^r) = r + 1$ $(j = 0, 1)$.

Пусть $W_{p)}^m$ $(m = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant p < \infty)$ — класс заданных на $[0, 1]$ функций $f(t)$, $(m-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $\|f^{(m)}\|_p = \|f^{(m)}\|_{L_p[0,1]} \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть подпространство сплайнов $S_r(\Delta_N)$ интерполирует во внутренних точках τ_i $(i = 1, 2, \ldots, L-1)$ разбиения (2) при краевых условиях $I = (I_0^r, I_1^r)$, причем $r \notin I_0^r \cup I_1^r$, а подпространство сплайнов $S_r(\Delta_L)$ интерполирует во внутренних точках t_k $(k = 1, \ldots, N-1)$*

разбиения (1) *при дополнительных краевых условиях* $J=(J_0^r, J_1^r)$. *Тогда для любой функции* $f\in W_p^{r+1}$ $(1\leqslant p<\infty)$ *выполняется неравенство*

$$\|f-\sigma(f, \Delta_N, I)\|_1\leqslant\|\varphi-\sigma(\varphi, \Delta_L, J)\|_{p'}\ (1/p+1/p'=1), \tag{3}$$

где $\varphi\in W_\infty^{r+1}$, $\varphi^{(r+1)}(t)=(-1)^i$ *для* $\tau_{i-1}\leqslant t<\tau_i$ $(i=1, 2, \ldots, L)$. *Оценка* (3) *на классе* W_p^{r+1} *точная*.

Доказательство. Пусть $f\in W_p^{r+1}$, $\delta(t)=f(t)-\sigma(f, \Delta_N, I, t)$, $g(t)=g(f, t)$ — функция из W_∞^{r+1}, у которой $g^{(r+1)}(t)=\operatorname{sgn}\delta(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, $\sigma(g, \Delta_L, J, t)$ — сплайн из $S_r(\Delta_L)$, интерполирующий функцию $g(t)$ в точках t_k $(k=1, \ldots, N-1)$ при краевых условиях $J=(J_0^r, J_1^r)$. Так как $r\notin I_0^r\cup I_1^r$, то $0\in J_0^r\cap J_1^r$. Положив $\eta(t)=g(t)-\sigma(g, \Delta_L, J, t)$, получим

$$\delta(\tau_i)=0\ (i=1, 2, \ldots, L-1),\ \delta^{(\nu)}(0)=0\ (\nu\in I_0^r),\ \delta^{(\nu)}(1)=0\ (\nu\in I_1^r), \tag{4}$$

$$\eta(t_k)=0\ (k=0, 1, \ldots, N),\ \eta^{(\mu)}(0)=0\ (\mu\in J_0^r),\ \eta^{(\mu)}(1)=0\ (\mu\in J_1^r). \tag{5}$$

Предположим, что $0\in I_0^r\cap I_1^r$, т. е. $\delta(0)=\delta(1)=0$. Интегрируя по частям и замечая, что

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\delta'(t)\,dt=0\quad(i=1, 2, \ldots, L),$$

будем иметь

$$\|\delta\|_1=\int_0^1\delta(t)\,g^{(r+1)}(t)\,dt=-\int_0^1\delta'(t)\,g^{(r)}(t)\,dt=-\int_0^1\delta'(t)\,\eta^{(r)}(t)\,dt.$$

Интегрируя по частям последовательно еще $r-1$ раз, получаем $\|\delta\|_1=$

$$=\sum_{n=1}^{r-1}(-1)^n\,[\delta^{(n)}(1)\,\eta^{(r-n)}(1)-\delta^{(n)}(0)\,\eta^{(r-n)}(0)]+$$

$$+(-1)^r\int_0^1\delta^{(r)}(t)\,\eta'(t)\,dt.$$

В силу (4), (5) и взаимной дополнительности краевых условий внеинтегральные слагаемые исчезают и

$$\|\delta\|_1=\left|\int_0^1 f^{(r)}(t)\,\eta'(t)\,dt\right|=\left|\int_0^1 f^{(r+1)}(t)\,\eta(t)\,dt\right|\leqslant\|f^{(r+1)}\|_p\,\|\eta\|_{p'}\leqslant\|\eta\|_{p'}.$$

Если же $0\notin I_0^r\cup I_1^r$, то $r\in J_0^r\cap J_1^r$, так что $\delta(0)\neq 0$, $\delta(1)\neq 0$, но $\eta^{(r)}(0)=\eta^{(r)}(1)=0$. Интегрирование по частям на каждом промежутке (τ_{i-1}, τ_i) $(i=1, 2, \ldots, N)$ дает:

$$\|\delta\|_1=\int_0^1\delta(t)\,g^{(r+1)}(t)\,dt=\int_0^{\tau_1}\delta(t)\,d\eta^{(r)}(t)+\sum_{i=1}^{L-2}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\delta(t)\,d\eta^{(r)}(t)+$$

$$+\int_{\tau_{L-1}}^1\delta(t)\,d\eta^{(r)}(t)=-\int_0^1\delta'(t)\,\eta^{(r)}(t)\,dt$$

и т. д. Случай, когда $\delta(t)$ не обращается в нуль только на одном конце промежутка $[0, 1]$, рассматривается аналогично.

Итак установлено, что $\|\delta\|_1\leqslant\|\eta\|_{p'}$. Чтобы получить оценку (3), остается только заметить, что если $\varphi(t)$ — функция, определенная в формулировке теоремы 1, то [1]

$$|\eta(t)| \leqslant |\varphi(t) - \sigma(\varphi, \Delta_L, J, t)| \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Знак равенства в (3) имеет место для функции $f_0 \in W_p^{r+1}$, у которой

$$f_0^{(r+1)}(t) = \|\psi\|_{p'}^{1-p'} |\psi(t)|^{p'-1} \operatorname{sgn} \psi(t),$$

где $\psi(t) = \varphi(t) - \sigma(\varphi, \Delta_L, J, t)$. Действительно, $f_0^{(r)}(t)$ строго монотонна на каждом промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, а потому $\operatorname{sgn}[f_0(t) - \sigma(f_0, \Delta_N, I, t)] = \varepsilon \operatorname{sgn} \varphi^{(r+1)}(t)$, где $\varepsilon = +1$ или -1, т. е. в этом случае $\eta(t)$ с точностью до знака совпадает с $\psi(t)$, так что

$$\|f_0 - \sigma(f_0, \Delta_N, I)\|_1 = \left| \int_0^1 f_0^{(r+1)}(t) \psi(t)\, dt \right| = \|\psi\|_{p'}.$$

Теорема 1 доказана. Может случиться (это зависит от разбиений Δ_N и Δ_L и от выбора краевых условий), что $\sigma(\varphi, \Delta_L, J, t) \equiv 0$ и тогда погрешность интерполяции оценивается просто нормой $\|\varphi\|_{p'}$ совершенного сплайна $\varphi(t)$. Именно такая ситуация возникает, если разбиение $\Delta_N = \overline{\Delta}_N$ задается точками $t_k = k/N$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$, а краевые условия $I = \overline{I} = (\overline{I}_0^r, \overline{I}_1^r)$ — множествами $\overline{I}_0^r = \overline{I}_1^r = \{0, 2, 4, \ldots, r-1\}$ при r нечетном, и множествами $\overline{I}_0^r = I_1^r = \{1, 3, 5, \ldots, r-1\}$ при r четном. При краевых условиях $\overline{I}$ подпространство $S_r(\overline{\Delta}_N)$ интерполирует в точках $\tau_i = i/N$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$, если r нечетно и в точках $\tau_i = (2i-1)/2N$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — если r четно, причем в силу теоремы 1

$$\sup_{f \in W_p^{r+1}} \|f - \sigma(f, \overline{\Delta}_N, \overline{I})\|_1 = \|\varphi_{N, r+1}\|_{p'}, \tag{6}$$

где $\varphi_{N,m}(t)$ — эйлеров совершенный сплайн порядка m, определяемый равенствами

$$\varphi_{N,m}^{(m)}(t) = (-1)^k, \; (k-1)/N \leqslant t < k/N \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$
$$\varphi_{N,m}^{(m-2\nu)}(0) = \varphi_{N,m}^{(m-2\nu)}(1) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, [m/2])$$

и, при m нечетном $\int_0^1 \varphi_{N,m}(t)\, dt = 0$. Отметим, что $\varphi_{N,2j}(t)$ имеет простые нули в точках i/N $(i = 0, 1, \ldots, N)$, а $\varphi_{N,2j-1}(t)$ — простые нули в точках $(2i-1)/2N$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$; кроме того

$$\|\varphi_{N,m}\|_C = K_m/(\pi N)^m \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

где K_m—константы Фавара (см. [2], с. 66). Периодический аналог равенства (6) известен [3].

З а м е ч а н и е. Рассуждения, аналогичные приведенным, позволяют получить соответствующий результат и в случае кратного интерполирования полиномиальными сплайнами как минимального, так и более высокого дефекта; при этом могут задаваться также периодические краевые условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. G o l i t s c h e k M. V. On n-widths and interpolation by polynomiale splines.— J. Approx. Th., 1979, 26, c. 133—141.
2. К о р н е й ч у к Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 320 с.

3. K o r n e i č u k N. P. Exact error bound of approximation by interpolating splines in L — metric on the classes W_p^r $(1 \leqslant p < \infty)$ of periodic functions.— Anal. Math., 1977, 3, N 2, p. 109—117.

Институт математики АН УССР,
Днепродзержинский индустриальный институт

Поступила в редакцию
23.VII 1979 г.