УДК 519.21

Ю. М. Крендель, Н. П. Леонтьева

Об одной задаче в телефонной системе

Представим себе телефонную систему из $2 \leqslant N < \infty$ абонентов, каждый из которых может подать заявку на разговор с любым (но только с одним) из $N - 1$ других абонентов. Разговор начинается немедленно, если вызванный абонент свободен, в противном случае заявка присоединяется к очереди ожидающих разговора с вызванным абонентом, если длина очереди к этому абоненту меньше некоторой фиксированной величины r $(0 \leqslant r \leqslant \leqslant N - 2)$, или теряется, если длина очереди больше или равна r. Занятые абоненты (т. е. ведущие разговор или ожидающие его) заявок не подают. Заявки на разговор к одному и тому же занятому абоненту удовлетворяются в порядке поступления.

Такого рода системы отражают функционирование не только узлов телефонных систем, но и узлов коммуникационных сетей, где роль абонентов играют каналы передачи данных [1].

В этой системе представляют интерес такие характеристики, как а) число занятых и свободных абонентов, количество одновременно ведущихся разговоров и абонентов, *принадлежащих каждому из них* (в число абонентов, принадлежащих данному разговору, включаются сами разговаривающие, ожидающие разговора с ними, ожидающие этих ожидающих и т. д.); б) время ожидания абонентом, подавшим заявку, начала разговора, а при $r < < N - 2$ — вероятность потери заявки.

Здесь рассматриваются характеристики типа а) для систем без потерь ($r = N - 2$) и систем без очередей ($r = 0$), удовлетворяющих следующим условиям: 1) процессы поступления заявок от свободных абонентов независимы в совокупности, и вероятность того, что абонент, свободный в момент t, подаст заявку на разговор в течение промежутка $(t, + u)$ равна $1 - \exp\{-\lambda (N - 1) u\}$, $\lambda > 0$, и $u > 0$. С вероятностью $1/(N - 1)$ поданная заявка есть заявка на разговор с конкретным абонентом: 2) длительности всех разговоров независимы между собой и от процесса поступления заявок и имеют показательное распределение с параметром μ; 3) ограничений на число одновременно ведущихся разговоров не накладывается, т. е. число их может изменяться в пределах от 0 до m, где $m = [N/2]$ целая часть $N/2$.

Замечание. Условие 1) эквивалентно следующему: процессы поступления заявок от любого свободного абонента к любому другому являются независимыми пуассоновыми процессами с одним и тем же параметром λ.

Телефонная система такого типа является системой массового обслуживания с обратной связью: суммарная интенсивность поступления заявок зависит от состояния системы (числа свободных абонентов в ней); обслуживание состоит в обеспечении разговора отдельных пар абонентов.

Состояние описанной системы будем характеризовать вектором $\alpha = =(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $N \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \alpha_m \geqslant 0$ и $\alpha_k = 0$, если число ведущихся разговоров строго меньше k, в противном случае α_k есть число абонентов, принадлежащих к-му разговору (разговоры упорядочены по количеству принадлежащих им абонентов), $\alpha_k \neq 1$, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \leqslant N$. Множество всех состояний системы обозначим через Ω.

Число свободных абонентов $\gamma_1(\alpha) = N - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$, число одновременно ведущихся разговоров $\gamma_2(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} I(\alpha_k > 0)$, где $I(\mathrm{A})$ — индикаторная функция множества А.

Под равенством векторов α и β будем понимать систему равенств $\alpha_k = \beta_k$, $k = 1, \ldots, m$. Положим $k_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} I(\alpha_k = \alpha_i)$. Обозначим через $\alpha^{(i,j)}$ $(\alpha^{(i)})$ вектор α, у которого компоненты α_i и α_j (α_i) заменены нулями.

Теорема. *Для телефонной системы описанного вида с $r = N - 2$ процесс $\alpha(t)$, $t \geqslant 0$, является однородным марковским процессом и при любом начальном распределении π_0 на Ω существует предельное распределение*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(\alpha(t) = \alpha) = \pi(\alpha) > 0, \ \alpha \in \Omega,$$

являющееся единственным решением системы уравнений

$$\pi(\alpha) = \sum_{\beta \in \Omega} p(\alpha, \beta)\, \pi(\beta), \quad \sum_{\alpha \in \Omega} \pi(\alpha) = 1, \tag{$*$}$$

где

$$p(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \lambda(N-1)\gamma_1(\beta) - \mu\gamma_2(\beta), \ \textit{если} \ \alpha = \beta; & (1) \\ \lambda\beta_i\gamma_1(\beta)\, k_i(\beta), \ \textit{если} \ \alpha_k = \beta_k \ \textit{при} \ k \neq i, & \\ \qquad \alpha_i = \beta_i + 1, \ 2 \leqslant \beta_i \leqslant N - 1; & (2) \\ \lambda\gamma_1(\beta)(\gamma_1(\beta) - 1), \ \textit{если} \ \alpha_k = \beta_k \ \textit{при} \ k \neq i, & \\ \qquad \alpha_i = 2, \ \beta_i = 0; & (3) \\ \mu \dfrac{1 + I(\alpha_l \neq \alpha_j)}{\beta_i - 1} k_i(\beta), \ \textit{если} \ \alpha^{(l,j)} = \beta^{(i)}, & (4) \\ \qquad \beta_i = \alpha_l + \alpha_j > 2; & \\ \mu k_i(\beta), \ \textit{если} \ \alpha^{(k)} = \beta^{(i)}, \ \alpha_k = 0, \ \beta_i = 2; & (5) \\ \quad 0 - \textit{в остальных случаях}. & \end{cases}$$

Событие A, состоящее в том, что группа из β_i абонентов, принадлежащих i-му разговору, состоит из подгрупп β_i' и β_i'', $\beta_i' \geqslant \beta_i'' \geqslant 1$, каждая из которых принадлежит одному из двух абонентов, ведущих i-й разговор, запишем в виде $A = \{\beta_i = (\beta_i', \beta_i'')\}$ (в число абонентов, принадлежащих данному абоненту, ведущему разговор, входят: сам этот абонент, ожидающие разговора с ним, ожидающие этих ожидающих и т. д.).

Лемма. *Для любых $\beta_i' > \beta_i''$, $\beta_i' + \beta_i'' = \beta_i > 2$, $t > t_1 > \ldots > t_n > 0$ и $\beta^1, \ldots, \beta^n$, $\beta^k \in \Omega$, $k = 1, \ldots, n$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m) \in \Omega$ при любом начальном значении $\alpha(0) \in \Omega$*

$$\mathbf{P}(\alpha_i(t) = (\beta_i', \beta_i'')/\alpha(t) = \beta, \alpha(t_1) = \beta^1, \ldots, \alpha(t_n) = \beta^n) = \frac{1 + I(\beta_i' \neq \beta_i'')}{\beta_i - 1},$$

где $\alpha_i(t)$ i-я координата вектора $\alpha(t)$.

Доказательство леммы. Если $\beta_i > 2$, то группы из $\beta_i' - 1$ и $\beta_i'' - 1$ тех абонентов, которые принадлежат одному из двух абонентов участвующих в i-м разговоре, но не ведут его сами, поступили позднее тех абонентов, которые участвуют в этом разговоре. (Обслуживание заявок к занятому абоненту — в порядке поступления.)

Поэтому в момент начала образования рассматриваемых групп, разговор, являющийся i-м в момент t, или уже велся или один из участвующих в нем абонентов стоял в очереди к другому.

Перенумеруем абонентов, составляющих эти группы, числами от 1 до $\beta - 2$ в порядке поступления их в общую группу из β абонентов, принадлежащих i-му разговору.

A. Пусть p_i — вероятность того, что номера абонентов первой группы есть числа $1 \leqslant n_1' < n_2' < \ldots < n'_{\beta_i'-1} \leqslant \beta_i - 2$, а второй — остальные из $\beta_i - 2$ чисел $1 \leqslant n_1'' < n_2'' < \ldots < n''_{\beta_i''-1}$. Эта вероятность является произведением $\beta_i - 2$ дробей, числители которых числа от 1 до $\beta_i' - 1$ для дробей на местах $n_1', \ldots, n'_{\beta_i'-1}$, и числа от 1 до $\beta_i'' - 1$ — для дробей на местах $n_1'', \ldots, n''_{\beta_i''-1}$, а знаменатели — числа от 2 до $\beta_i - 1$, т. е. $p_i = (\beta_i' - 1)!\,(\beta_i'' - 1)!/(\beta_i - 1)!$ и не зависит от набора $(n_1', n_2', \ldots, n'_{\beta_i'-1})$. (Это так, поскольку первая из рассматриваемых заявок присоединяется к группе из двух абонентов, каждая следующая — к группе, в которой на одного абонента больше, чем в предыдущей, последняя — к группе из $\beta_i - 1$ абонентов, причем заявка, поступающая на место n_k' (n_k'') присоединяется к подгруппе, содержащей k абонентов. Из условия 1) следует, что вероятность того, что заявка, поступившая в группу из n абонентов, присоединилась к ее подгруппе из k абонентов, есть k/n).

B. Количество различных наборов $n_1' < \ldots < n'_{\beta_i'-1}$ из чисел от 1 до $\beta_i - 2$ можно выбрать числом способов, равным $\binom{\beta_i - 2}{\beta_i' - 1}$.

C. Если $\beta_i' > \beta_i''$, то абонентом, к которому поступило $\beta_i' - 1$ заявок может быть любой из разговаривающих.

Объединяя утверждения **A**, **B** и **C**, получим утверждение леммы.

Замечания 1. Если β_i — нечетно, то $\beta_i' \neq \beta_i''$ и распределение пары (β_i', β_i'') при данной сумме $\beta_i = \beta_i' + \beta_i'' > 2$ есть равномерное (дискретное) распределение на множестве пар (β_i', β_i''), $\beta_i' \geqslant \beta_i'' \geqslant 1$, $\beta_i' + \beta_i'' = \beta_i$.

2. Распределение пары $(\bar{\beta}, \bar{\bar{\beta}}_i)$, где $\bar{\beta}_i$ — количество абонентов, принадлежащих, например, тому из абонентов, ведущих i-й разговор, который подал заявку, $\bar{\bar{\beta}}_i$ — количество абонентов, принадлежащих другому из ведущих i-й разговор абонентов, при данной сумме $\bar{\beta}_i + \bar{\bar{\beta}}_i = \beta_i > 2$ равномерно на множестве неупорядоченных пар $(\bar{\beta}_i\ \bar{\bar{\beta}}_i)$, $\bar{\beta}_i + \bar{\bar{\beta}}_i = \beta_i$; точнее $\mathbf{P}(\alpha(t) = (\bar{\beta}_i, \bar{\bar{\beta}}_i)/\alpha(t) = \beta,\ \alpha(t_1) = \beta^1, \ldots, \alpha(t_n) = \beta^n) = 1/(\beta_i - 1)$. Вероятность в левой части этого равенства при $\beta_i = n > m$, $\bar{\beta}_i = m$, $\bar{\bar{\beta}}_i = n - m$, $m = 1, \ldots, m - 1$, обозначим через $P(m, n)$. Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве леммы, можно проверить, что при $n = 3$ $P(m, 3) = 1/2$ для $m = 1$ и $m = 2$ и что $P(m, n)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $P(m, n) = \frac{m-1}{n} P(m-1, n-1) + \frac{(n-1)-(m-1)}{n} P(m, n-1)$, из которых по индукции следует, что $P(m, n) = 1/(n-1)$ для $m = 1, \ldots, n-1$ и всех n.

Доказательство теоремы. Независимо от «прошлого», т. е. состояний системы в моменты времени $t > t_1 > \ldots > t_n > 0$, при любом t $\Delta t \to 0$ имеют место следующие утверждения.

1. Вероятность того, что $\alpha(t+\Delta t) = \beta$ при условии, что $\alpha(t) = \beta$, равна $\exp\{-\lambda(N-1)\gamma_1(\beta)\Delta t\}\exp\{-\mu\gamma_2(\beta)\Delta t\} = 1-(\lambda(N-1)\gamma_1(\beta)+\mu\gamma_2(\beta)\Delta t+ + o(\Delta t)$.

2. Вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ ни один из $\gamma_2(\beta)$ ведущихся в момент t разговоров не будет закончен, один из $\gamma_1(\beta)$ свободных абонентов подаст заявку на разговор с одним из абонентов, принадлежащих i-му разговору, а остальные $\gamma_1(\beta)-1$ абонентов заявок не подадут, при условии, что $\alpha(t) = \beta$ равна $\exp\{-\mu\gamma_2(\beta)\Delta t\}\exp\{-\lambda(N-1)(\gamma_1(\beta)-1)\Delta t\} \times$
$$\times (1-\exp\{-\lambda(N-1)\Delta t\})\binom{\gamma_1(\beta)}{1}\frac{\beta_i}{N-1} = \lambda\beta_i\gamma_1(\beta)\Delta t + o(\Delta t).$$

3. Вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ ни один из $\gamma_2(\beta)$ ведущихся разговоров не будет закончен, один из свободных абонентов подаст заявку на разговор с другим свободным абонентом, а остальные заявок не подадут, при условии $\alpha(t) = \beta$ равна $\exp\{-\mu\gamma_2(\beta)\Delta t\}\exp\{-\lambda(N-1))\gamma_1(\beta)-$
$$-1)\Delta t\}(1-\exp\{-\lambda(N-1)\Delta t\})(\gamma_1(\beta))\frac{\gamma_1(\beta)-1}{N-1} = \lambda(\gamma_1(\beta)-1)\gamma_1(\beta)\Delta t +$$
$+ o(\Delta t)$.

4. Вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ не подаст заявки на один из свободных абонентов, закончится i-й разговор, а остальные будут продолжаться (это событие обозначим B_i) при условии, что $\alpha(t) = \beta$ равна $\exp\{-\lambda(N-1)\gamma_1(\beta)\}\exp\{-\mu(\gamma_2(\beta)-1)\Delta t\}(1-\exp\{-\mu\Delta t\}) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$. Если $\alpha(t) = \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m)$, $\beta_i > 2$, и происходит событие B_i, то $\alpha(t+\Delta t) = \alpha$ тогда и только тогда, когда при некоторых l и j выполняются равенства
$$\alpha^{(l,j)} = \beta^{(i)},\ \alpha_l + \alpha_j = \beta_i > 2. \tag{6}$$
Если $\alpha(t) = \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m)$, $\beta_i = 2$ и происходит событие B_i, то $\alpha(t+\Delta t) = \alpha$, где
$$\alpha^{(k)} = \beta^{(i)},\ \alpha_k = 0,\ \beta_i = 2. \tag{7}$$
Если $k_i(\beta) = \sum_{k=1}^{m} I(\beta_k = \beta_i)$ — число разговоров, каждому из которых принадлежит количество абонентов, равное β_i, то переход системы за время $(t, t+ + \Delta t)$ из состояния β_i, удовлетворяющее приведенным выше условиям (6) или (7), может происходить путем окончания любого из $k_i(\beta)$ разговоров.

5. Вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ произойдет не менее двух событий вида «поступила заявка» или «окончился разговор», имеет порядок $o(\Delta t)$.

Из утверждений 1—5 следует, что процесс $\alpha(t)$, $t \geqslant 0$, является однородным марковским процессом с конечным числом состояний, для которого $\mathbf{P}(\alpha(t+\Delta) = \alpha/\alpha(t) = \beta) > 0$ при всех α и β из Ω и $\Delta > 0$, $t \geqslant 0$, и что инфитезимальный оператор этого процесса задается формулами (1)—(5). Для такого процесса имеет место утверждение теоремы (см. например, [2], с. 193, и [3], с. 306).

Для телефонных систем без очередей ($r = 0$) каждая из компонент вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ может принимать лишь значения 0 и 2. Для таких систем $\gamma_1 + 2\gamma_2 = N$. Нетрудно проверить, что процессы $\alpha(t)$, $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ для этих систем являются однородными марковскими процессами и для них справедлива приведенная выше теорема, причем коэффициенты $p(\alpha, \beta)$ для системы (*) имеют вид
$$\begin{cases} 1-\lambda(\gamma_1(\beta)-1)\gamma_1(\beta)-\mu\gamma_2(\beta), & \text{если } \alpha_k = \beta_k,\ k = 1, \ldots, m; \\ \lambda(\gamma_1(\beta)-1)\gamma_1(\beta), & \text{если } \alpha_k = \beta_k \text{ при } k \neq i,\ k = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

$$p(\alpha, \beta) = \begin{cases} & \alpha_i = 2,\ \beta_i = 0; \\ \mu\gamma_2(\beta), \text{ если } \alpha_k = \beta_k \text{ при } k \neq i,\ k = 1, \ldots, m, \alpha_i = 0,\ \beta_i = 2; \\ 0 \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что стационарное распределение величины γ_1 ($\varphi_j = \mathbf{P}(\gamma_1 = j)$) удовлетворяет уравнениям $\varphi_j = \dfrac{\mu(N-(j-2))/2}{\lambda(j-1)j + \mu\dfrac{N-j}{2}}\varphi_{j-2} + \dfrac{\lambda(j+1)(j+2)}{\lambda(j-1)j + \mu\dfrac{N-j}{2}}\varphi_{j+2}$, $j = N, N-2, \ldots, \varphi_N + \varphi_{N-2} + \ldots = 1$ и $\varphi_j = 0$ при $j = N-1, N-3, \ldots$, а стационарное распределение величины γ_2 ($\mathbf{P}(\gamma_2 = k) = q_k$) находится из уравнений

$$q_j = \frac{\lambda(N-2j+1)(N-2j+2)}{\lambda(N-2j-1)(N-2j)+j\mu}q_{j-1} + \frac{\mu(j+1)}{\lambda(N-2j-1)(N-2j)+j\mu}q_{j+1},$$

$j = 0, 1, \ldots, [N/2]$, $\sum_{j=0}^{[N/2]} q_j = 1$, $q_{-1} = 0$ по определению.

Замечание. Если в рассмотренных телефонных системах без очередей $N \to \infty$, $\lambda = \lambda(N) \to 0$ при $N \to \infty$ так, что $\lim_{n\to\infty} N^2\lambda(N) = \Lambda < \infty$, то уравнения (8) переходят в уравнения

$$q_j = \frac{\Lambda}{\Lambda + j\mu}q_{j-1} + \frac{(j+1)\mu}{\Lambda + j\mu}q_{j+1}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1 \ (q_{-1} = 0),\ j = 0, 1, \ldots,$$

совпадающие с уравнениями Эрланга для числа ведущихся разговоров в системе обслуживания с бесконечным числом каналов и пуассоновым входным потоком интенсивности Λ, не зависящим от процесса обслуживания, описанного в условии 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях.— М.: Мир, 1966.— 00 с
2. Сарымсаков Т. А. Основы теории процессов Маркова.— М.: Гостехиздат, 1954.— 00 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1973. Т. 2.

Институт автоматики
и электрометрии СО АН СССР

Поступила в редакцию
9.VII 1979 г.