УДК 512.532.2

Л. П. Лисовик

О квазитождествах в свободной полугруппе

В работе устанавливается серия квазитождеств для свободной полугруппы с единицей.

Для свободной полугруппы S с единицей e существует конечный алфавит $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ такой, что элементы из S суть слова в алфавите Σ. При этом единичный элемент e из S отождествляется с пустым словом ε. Тогда S обозначим через Σ^*.

Укажем другие обозначения: $|u|$ — длина слова u ($|\varepsilon| = 0$); $N = \{0, 1, \ldots\}$ — множество натуральных чисел; $N^+ = N \setminus \{0\}$; $(w)^k = \underbrace{w \cdot \ldots \cdot w}_{k \text{ раз}}$ для любых $w \in \Sigma^*$, $k \in N$; $w^* = \{\varepsilon, w, (w)^2, \ldots\}$ для любого $w \in \Sigma^*$.

Полагаем, что слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ имеют общую основу, если существует слово w такое, что $\alpha_i \in w^*$, $i = \overline{1, k}$.

Лемма 1. *Для любых слов α_1, α_2, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, u, v в конечном алфавите Σ выполняются следующие утверждения:*

а) *если $(\alpha_1)^n = (\alpha_2)^m$ для некоторых $n, m \in N^+$, то α_1, α_2 имеют общую основу;*

б) *если $(\alpha_1)^n = uv$ ($(\alpha_1)^n = vu$) для некоторого $n \in N$, то $\alpha_1 u = u\alpha'$ (соответственно $u\alpha_1 = \alpha' u$) для некоторого α';*

в) *если* $\alpha_1 u = u\bar{\alpha}_1$, $\alpha_2 u = u\bar{\alpha}_2$ *и* $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ *имеют общую основу, то и* α_1, α_2 *имеют общую основу;*

г) *если* $v \neq \varepsilon$ *и* $(\alpha_i)^{|u|+|v|} = u(v)^{|\alpha_i|} w_i$ *для некоторого* w_i, $i = 1, 2$, *то* α_1, α_2 *имеют общую основу;*

д) *если* $\alpha_1 \neq \varepsilon$, *и имеют общую основу и* α_1, v *имеют общую основу, то* α_1, u, v *также имеют общую основу.*

Доказательство. Будем считать, что $\alpha_1 \neq \varepsilon$, $\alpha_2 \neq \varepsilon$.

а) Пусть $d = p|\alpha_1| - q|\alpha_2|$ — наибольший общий делитель чисел $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, где $p, q \in N^+$. Тогда $(\alpha_1)^p = (\alpha_2)^q w$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in w^*$.

б) Имеем $u = (\alpha_1)^c \beta$, где $\alpha_1 = \beta\gamma$, $c \in N$. Тогда $\alpha_1 u = (\alpha_1)^c \beta\gamma\beta = u(\gamma\beta)$.

в) Пусть $(\bar{\alpha}_1)^n = (\bar{\alpha}_2)^m$ для некоторых n, $m \in N^+$. Отсюда $u(\bar{\alpha}_1)^n = u(\bar{\alpha}_2)^m$. По условию $u(\bar{\alpha}_i)^k = (\alpha_i)^k u$. Тогда $(\alpha_1^n) u = (\alpha_2^m) u$ и $(\alpha_1)^n = (\alpha_2)^m$. Согласно а) α_1, α_2 имеют общую основу.

г) Согласно б) $\alpha_i u = u\beta_i$ для некоторого β_i, где $|\beta_i| = |\alpha_i|$, $i = 1, 2$. Тогда по условию $(\beta_i)^{|u|+|v|} = (v)^{|\beta_i|} w_i$. Отсюда $(\beta_i)^{|v|} = (v)^{|\beta_i|}$ и значит $(\beta_1)^{|v||\beta_2|} = (\beta_2)^{|v||\beta_1|}$. Поэтому согласно а) и в) α_1, α_2 имеют общую основу.

д) Это утверждение очевидно.

Теорема 1. *Пусть* $u_1, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1, \ldots, u_s, \alpha_1^s, \alpha_2^s, \alpha_3^s, u_{s+1}$, $v_1, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_3^1, \ldots$ $\ldots, v_r, \beta_1^r, \beta_2^r, \beta_3^r$, v_{r+1} — *слова (возможно и пустые) в конечном алфавите* Σ *и* $c = \max\{d^i + m_{j_1}^i + m_{j_2}^i \mid j_1 \neq j_2,\ j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\},\ i = 1, 2\}$, *где* $d^1 = |u_1 \cdot \ldots$ $\ldots \cdot u_{s+1}|$, $d^2 = |v_1 \cdot \ldots \cdot v_{r+1}|$, $m_j^1 = |\alpha_j^1 \cdot \ldots \cdot \alpha_j^s|$, $m_j^2 = |\beta_j^1 \cdot \ldots \cdot \beta_j^r|$, $j = \overline{1, 3}$. *Тогда, если для любой тройки чисел* $0 \leqslant k, l, m \leqslant c$, *по крайней мере одно из которых равно нулю, выполняется соотношение* $u_1 (\alpha_1^1)^k (\alpha_2^1)^l (\alpha_3^1)^m \cdot \ldots$ $\ldots \cdot u_s (\alpha_1^s)^k (\alpha_2^s)^l (\alpha_3^s)^m u_{s+1} = v_1 (\beta_1^1)^k (\beta_2^1)^l (\beta_3^1)^m \cdot \ldots \cdot v_r (\beta_1^r)^k (\beta_2^r)^l (\beta_3^r)^m v_{r+1}$ [1]), *то это же соотношение верно для любых натуральных* k, l, m.

Доказательство. Проводим доказательство индукцией по числу $s + r$. Случай $s = r = 0$ очевиден. Доказательство теоремы разбивается на пункты A, B, C и сводится в пункте A к случаю $u_1 = v_1 = v_2 = \varepsilon$, который рассматривается в пункте C при условии, что $s \geqslant 2$, $r \geqslant 2$. Случай $s \leqslant 1$ или $r \leqslant 1$ рассматривается в пункте B.

A. Если $|u_1| \geqslant |v_1|$, то $u_1 = v_1 u'$. Поэтому можно считать, что $v_1 = \varepsilon$. Если $0 < |v_2| \leqslant |u_1|$, то в силу согласованности вектора $(0, 0, 0)$ $u_1 = v_2 u''$. Тогда из согласованности векторов $(c, 0, 0)$, $(0, c, 0)$, $(0, 0, c)$ для любого $\beta_i^1 \neq \varepsilon$ $(\beta_i^1)^c = v_2 \beta^{(i)}$ и по лемме 1 найдется $\bar{\beta}_i^1$ такое, что $\beta_i^1 v_2 = v_2 \bar{\beta}_i^1$, $i = \overline{1, 3}$. Тогда, модифицируя u_1, β_1^1, β_2^1, β_3^1 соответственно в u'', $\bar{\beta}_1^1$, $\bar{\beta}_2^1$, $\bar{\beta}_3^1$, в условии теоремы можно положить $v_2 = \varepsilon$.

Если $|v_2| > |u_1| > 0$, то $v_2 = u_1 v'$. Тогда аналогично для любого β_i^1 $\beta_i^1 u_1 = u_1 \bar{\beta}_i^1$ и в условии теоремы можно положить $u_1 = \varepsilon$.

Если $u_1 = v_1 = \varepsilon$ и либо $u_2 = \varepsilon$, либо $v_2 = \varepsilon$, то переходим к пункту B или C. Иначе необходимо рассмотреть два случая: 1) $u_1 \neq \varepsilon$, $v_1 = v_2 = \varepsilon$; 2) $u_1 = v_1 = \varepsilon$, $u_2 \neq \varepsilon$, $v_2 \neq \varepsilon$.

1). Пусть $u_1 \neq \varepsilon$, $v_1 = v_2 = \varepsilon$. Если $\beta_j^1 = \varepsilon$, $j = \overline{1, 3}$, то используем предположение индукции. Иначе покажем, что $u_1 \alpha_j^1 = \bar{\alpha}_j^1 u_1$, $j = \overline{1, 3}$. Пусть $\beta_i^1 \neq \varepsilon$. Тогда при $\alpha_j^1 \neq \varepsilon$ $(j \leqslant i)$ в силу согласованности вектора (k_1, k_2, k_3), где $k_i = k_j = c$ и $k_f = 0$, $f \notin \{i, j\}$, $u_1 (\alpha_j^1)^p = (\beta_i^1)^q u_1$ для $p, q \geqslant |u_1|$ таких, что $p|\alpha_j^1| = q|\beta_i^1|$. Следовательно $(\alpha_j^1)^p = \alpha u_1$ и по лемме 1 $u_1 \alpha_j^1 = \bar{\alpha}_j^1 u_1$.

Из согласованности вектора $(c, 0, 0)$ при $\beta_1^1 \neq \varepsilon$ $\alpha_1^1 \neq \varepsilon$ имеем $(\beta_1^1)^q = (\bar{\alpha}_1^1)^p$, где q, p такие, что $q|\beta_1^1| = p|\alpha_1^1|$. Тогда по лемме 1 β_1^1, $\bar{\alpha}_1^1$ имеют общую основу. Поэтому в условии теоремы можно положить равным ε по крайней мере одно из α_1^1, β_1^1. Пусть $\beta_1^1 \neq \varepsilon$, $\alpha_1^1 = \varepsilon$. В силу согласованности

* В этом случае будем говорить, что вектор (k, l, m) согласован.

вектора $(c, c, 0)$ при $\alpha_2^1 \neq \varepsilon$ $u_1(\alpha_2^1)^p = (\beta_1^1)^q u_1$ для $p, q \geqslant |u_1|$ таких, что $p|\alpha_2^1| = q|\beta_1^1|$. Следовательно $(\alpha_2^1)^p = \alpha' u_1$ и по лемме 1 $u_1\alpha_2^1 = \bar{\alpha}_2^1 u_1$. Аналогично $u_1\alpha_3^1 = \bar{\alpha}_3^1 u_1$. Значит согласно предыдущему абзацу при $\beta_1^1 \neq \varepsilon$ или $\beta_3^1 \neq \varepsilon$ $u_1\alpha_i^1 = \bar{\alpha}_i^1 u_1$, $i = \overline{1, 3}$. Исключая случай $\beta_1^1 = \beta_2^1 = \beta_3^1 = \varepsilon$, полагаем $\beta_1^1 = \varepsilon$, $\beta_2^1 \neq \varepsilon$, $\beta_3^1 = \varepsilon$. При $\bar{\alpha}_1^1 \neq \varepsilon$ в силу согласованности вектора $(c, c, 0)$ $(\bar{\alpha}_1^1)^p = (\beta_2^1)^q$ для p, q таких, что $p|\bar{\alpha}_1^1| = q|\beta_2^1|$ и по лемме 1 $\bar{\alpha}_1^1$, β_2^1 имеют общую основу. Соответственно при $\bar{\alpha}_2^1 \neq \varepsilon$ в силу согласованности вектора $(0, c, 0)$ слова $\bar{\alpha}_2^1$, β_2^1 имеют общую основу. Тогда $\bar{\alpha}_1^1$, $\bar{\alpha}_2^1$, β_2^1 имеют общую основу. Поэтому в условии теоремы можно положить равным ε по крайней мере одно из α_2^1, β_2^1. При $\beta_2^1 \neq \varepsilon$ считаем $\alpha_2^1 = \varepsilon$. Тогда при $\alpha_3^1 \neq \varepsilon$ в силу согласованности вектора $(0, c, c)$ имеем $u_1(\alpha_3^1)^p = (\beta_2^1)^q u_1$, где $p|\alpha_3^1| = q|\beta_2^1|$; $p, q \geqslant |u_1|$. Следовательно $(\alpha_3^1)^p = \alpha'' u_1$ и по лемме 1 $u_1\alpha_3^1 = \bar{\alpha}_3^1 u_1$.

Таким образом модифицируя u_1, α_1^1, α_2^1, α_3^1, u_2 соответственно в ε, $\bar{\alpha}_1^1$, $\bar{\alpha}_2^1$, $\bar{\alpha}_3^1$, u_1u_2 сводим случай 1) к случаю $u_1 = v_1 = v_2 = \varepsilon$.

2). Пусть $u_1 = v_1 = \varepsilon$, $u_2 \neq \varepsilon$, $v_2 \neq \varepsilon$. Если $\alpha_i^1 = \beta_i^1$, $i = \overline{1, 3}$, то можно считать $\alpha_i^1 = \beta_i^1 = \varepsilon$ и использовать предположение индукции. Иначе пусть для определенности $|\alpha_i^1| > |\beta_i^1|$ для некоторого $i \in \overline{1, 3}$ и $\alpha_j^1 = \beta_j^1 = \varepsilon$ для $j = \overline{1, i-1}$. Тогда в силу согласованности векторов с i-й ненулевой координатой α_i^1, β_i^1 имеют общую основу. Возьмем наибольшее j такое, что $\alpha_i^1, \ldots, \alpha_j^1$, $\beta_i^1, \ldots, \beta_i^1$ имеют общую основу. Тогда можно считать, что $\alpha_k^1 = \varepsilon$ или $\beta_k^1 = \varepsilon$ для $k = \overline{i, j}$ и $\alpha_i^1 \neq \varepsilon$. Если $\beta_n^1 = \varepsilon$, $n = \overline{1, 3}$, то используем предположение индукции. Иначе допустим, что $j < 3$. Тогда $\alpha_{j+1}^1 \neq \varepsilon$ или $\beta_{j+1}^1 \neq \varepsilon$. Пусть, кроме того $\beta_n^1 \neq \varepsilon$. В силу согласованности векторов имеют общую основу слова из следующих наборов: 1) α_i^1, β_{j+1}^1, 2) β_{j+1}^1, α_{j+1}^1 при $\beta_{j+1}^1 \neq \varepsilon$; 3) α_i^1, β_n^1, 4) β_n^1, α_{j+1}^1, 5) α_{j+1}^1, β_{j+1}^1 при $\alpha_{j+1}^1 \neq \varepsilon$ (как в случае $n < j+1$ $(\alpha_n^1 = \varepsilon)$, так и в случае $n \geqslant j+1$). Поэтому по лемме 1 слова α_i^1, β_{j+1}^1, α_{j+1}^1 имеют общую основу и для j не выполняется условие максимальности. Значит, $j = 3$.

Тогда можно считать, что для каждого $i = \overline{1, 3}$ $\alpha_i^1 = \varepsilon$ или $\beta_i^1 = \varepsilon$. Пусть w — меньшее по длине из слов u_2, v_2. Тогда в силу согласованности вектора $(0, 0, 0)$ $u_2 = wu'$, $v_2 = wv'$, где $u' = \varepsilon$ или $v' = \varepsilon$. При $\alpha_i^1 \neq \varepsilon$, $\beta_i^1 = \varepsilon$ в силу согласованности вектора (k_1, k_2, k_3), где $k_j = \begin{cases} c, & j = i, \\ 0, & j \neq i \end{cases}$, имеем $(\alpha_i^1)^{|w|} = w\alpha$ и по лемме 1 $\alpha_i^1 w = w\bar{\alpha}_i^1$. Аналогично для каждого β_i^1 получаем $\beta_i^1 w = w\bar{\beta}_i^1$. Таким образом, модифицируя α_i^1, β_i^1 соответственно в $\bar{\alpha}_i^1$, $\bar{\beta}_i^1$, $i = \overline{1, 3}$, u_2 в u', v_2 в v', сводим случай 2) к случаю, когда $u_1 = v_1 = \varepsilon$ и либо $u_2 = \varepsilon$, либо $v_2 = \varepsilon$.

В. Пусть для определенности $r \leqslant 1$. Случай $r = 0$ или $s = 0$ очевиден. Пусть тогда $r = 1$, $s \geqslant 1$. Согласно рассуждениям п. A, можно считать, что $u_1 = v_1 = \varepsilon$ и $\alpha_i^1 = \varepsilon$ или $\beta_i^1 = \varepsilon$ для $i = \overline{1, 3}$. Тогда если $\beta_i^1 = \varepsilon$, то $|\alpha_i^1 \cdot \ldots \cdot \alpha_i^s| = |\beta_i^1| = 0$ в силу согласованности векторов $(0, 0, 0)$ (k_1, k_2, k_3), где $k_i = 1$, $k_j = 0$, при $j \neq i$. Следовательно, $\alpha_i^1 = \varepsilon$ для $i = \overline{1, 3}$. Остается использовать предположение индукции.

С. Пусть $u_1 = v_1 = v_2 = \varepsilon$. В силу п. А можно считать, что α_1^1, α_2^1, α_3^1, β_1^1, β_2^1, β_3^1 имеют общую основу для $i = \overline{1, 3}$ $\alpha_i^1 = \varepsilon$ или $\beta_i^1 = \varepsilon$ и существует число i — минимальное из чисел 1, 2, 3, такое, что $\alpha_i^1 \neq \beta_i^1$. Рассмотрим случай $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$.

(i) Пусть $i = 1$, $\alpha_1^1 \neq \varepsilon$. Если $|\alpha_1^1| > |\beta_1^2|$, то β_2^1, β_3^1, β_1^2, β_2^2, β_3^2 имеют общую основу и следовательно являются попарно коммутирующими сомножителями. Тогда можно модифицировать β_2^2, β_3^2 соответственно в $\beta_2^1\beta_2^2$, $\beta_3^1\beta_3^2$, а каждое из β_2^1, β_3^1 в ε и использовать предположение индукции.

Иначе $0<|\alpha_1^1|\leqslant|\beta_1^2|$. а). Пусть $\beta_2^1\neq\varepsilon$, $\alpha_3^1=\varepsilon$. В силу согласованности векторов $(0, c, 0)$, $(c, c, 0)$ имеем $(\beta_2^1)^{|u_2|}=u_2v$, $(\alpha_1^1)^{|u_2|}=u_2\alpha$. Отсюда по лемме 1 $v\beta_2^1=\bar{\beta}_2^1v$, $\alpha_1^1u_2=u_2\bar{\alpha}_1^1$. В силу согласованности вектора $(|\beta_2^1|, |u_2\alpha_1^1\alpha_1^2|, 0)$, сокращая слева на u_2, имеем $(\bar{\alpha}_1^1)^{|\beta_1^2|}(\alpha_1^2)^{|\beta_2^1|}w=v(\beta_2^1)^{|\alpha_1^1\alpha_1^2|}=$ $=(\bar{\beta}_2^1)^{|\alpha_1^1\alpha_1^2|}v$ для некоторого w. Значит, $(\bar{\alpha}_1^1)^{|\beta_2^1|}=(\bar{\beta}_2^1)^{|\alpha_1^1|}$ и $(\alpha_1^2)^{|\beta_2^1|}=(\bar{\beta}_2^1)^{|\alpha_1^2|}$. Следовательно, $\bar{\alpha}_1^1$, α_1^2 имеют общую основу. Фактически вместо приведенного рассуждения было бы достаточно сослаться на согласованность векторов $(0, c, 0)$, $(k, l, 0)$, где $k\leqslant c$, $l\leqslant c$ и лемму 1(п. г). Далее так и будем поступать. Тогда, имея $\alpha_2^1=\alpha_3^1=\varepsilon$, можно модифицировать α_1^2 в $\bar{\alpha}_1^1\alpha_1^2$, α_1^1 в ε и использовать предположение индукции. б). Пусть $\beta_2^1\neq\varepsilon$, $\alpha_3^1\neq\varepsilon$. В силу согласованности векторов $(0, l, m)$ и леммы 1 β_2^1, β_2^2 имеют общую основу. Тогда α_1^1, β_2^1, β_1^2, β_2^2 имеют общую основу. Отсюда, имея $\beta_1^1=\beta_3^1=\varepsilon$, можно модифицировать β_2^2 в $\beta_2^1\beta_2^2$, β_2^1 в ε и использовать предположение индукции.

Пусть $\beta_2^1=\varepsilon$. Если $\beta_3^1=\varepsilon$, то остается использовать предположение индукции. Пусть $\beta_3^1\neq\varepsilon$ $(\alpha_3^1=\varepsilon)$. В силу согласованности векторов $(0, 0, c)$, $(c, 0, c)$ и $(0, c, c)$ получаем $(\alpha_1^1)^c=u_2\alpha'$ и $(\alpha_2^1)^c=u_2\alpha''$ при $\alpha_2^1\neq\varepsilon$. Значит, по лемме 1 $\alpha_1^1u_2=u_2\bar{\alpha}_1^1$, $\alpha_2^1u_2=u_2\bar{\alpha}_2^1$. Из того, что α_1^1, α_2^1 имеют общую основу, следует, что и $\bar{\alpha}_1^1$, $\bar{\alpha}_2^1$ имеют общую основу. (Действительно, если $(\alpha_1^1)^p=(\alpha_2^1)^q$, то $u_2(\bar{\alpha}_1^1)^p=(\alpha_1^1)^p u_2=(\alpha_2^1)^q u_2=u_2(\bar{\alpha}_2^1)^q$ и, значит, $(\bar{\alpha}_1^1)^p=(\bar{\alpha}_2^1)^q$. Из леммы 1 следует, что $\bar{\alpha}_1^1$, α_1^2, $\bar{\alpha}_2^1$, α_2^2 имеют общую основу соответственно в силу согласованности векторов $(k, 0, m)$ и $(0, l, m)$. Тогда при $\alpha_3^1=\varepsilon$ можно модифицировать α_1^2, α_2^2 соответственно в $\bar{\alpha}_1^1\alpha_1^2$, $\bar{\alpha}_2^1\alpha_2^2$, а каждое из α_1^1, α_2^1 в ε и использовать предположение индукции.

(ii) Пусть $i=1$, $\beta_1^1\neq\varepsilon$. в). Пусть $\alpha_2^1\neq\varepsilon$, $\beta_3^1=\varepsilon$. В силу согласованности векторов $(k, l, 0)$ по лемме 1 β_1^1, β_1^2 имеют общую основу. Тогда, при $\beta_2^1=\beta_3^1=\varepsilon$, можно модифицировать β_1^2 в $\beta_1^1\beta_1^2$, β_1^1 в ε и использовать предположение индукции. г). Пусть $\alpha_2^1\neq\varepsilon$, $\beta_3^1\neq\varepsilon$. В силу согласованности векторов $(0, 0, m)$ и $(0, l, m)$ получаем $(\alpha_2^1)^{|u_2|}=u_2\alpha$ и по лемме 1 $\alpha_2^1u_2=u_2\bar{\alpha}_2^1$. Из леммы 1 в силу согласованности векторов $(k, l, 0)$ следует, что $\bar{\alpha}_2^1$, α_1^2 имеют общую основу. Из леммы 1 в силу согласованности векторов $(0, l, m)$ следует, что $\bar{\alpha}_2^1$, α_2^2 имеют общую основу. Значит $\bar{\alpha}_2^1$, α_1^2, α_2^2 имеют общую основу. Отсюда, имея $\alpha_1^1=\alpha_3^1=\varepsilon$, можно модифицировать α_2^2 в $\bar{\alpha}_2^1\alpha_2^2$, α_2^1 в ε и использовать предположение индукции.

Пусть $\alpha_2^1=\varepsilon$. Если $\alpha_3^1=\varepsilon$, то остается использовать предположение индукции. Пусть $\alpha_3^1\neq\varepsilon$. В силу согласованности векторов $(k, 0, m)$ слова α_3^1, β_1^1, β_1^2 имеют общую основу, в силу согласованности векторов $(0, l, m)$ α_3^1, β_2^1, β_2^2 имеют общую основу (это следует из леммы 1). Значит, β_1^1, β_2^1, β_1^2, β_2^2 имеют общую основу. Тогда, если $\beta_3^1=\varepsilon$, можно модифицировать β_1^2, β_2^2 соответственно в $\beta_1^1\beta_1^2$, $\beta_2^1\beta_2^2$, а каждое из β_1^1, β_2^1 в ε и использовать предположение индукции.

(iii) Пусть $i=2$, $\alpha_2^1\neq\varepsilon$. Этот случай уже рассмотрен подпункте *(ii)*. Если $\beta_3^1=\varepsilon$, то остается использовать предположение индукции. Пусть $\beta_3^1\neq\varepsilon$. По лемме 1 в силу согласованности векторов $(0, 0, m)$, $(0, l, m)$ слова $\bar{\beta}_3^1$, $\bar{\alpha}_2^1$, α_2^2 имеют общую основу, где $\alpha_2^1u_2=u_2\bar{\alpha}_2^1$, $(\beta_3^1)^{|u_2|}=u_2v$, $v\beta_3^1=\bar{\beta}_3^1v$

в силу согласованности вектора $(c, 0, c)$ $\bar{\beta}_3^1$, α_1^2 имеют общую основу. Значит $\bar{\alpha}_2^1$, α_1^2, α_2^2 имеют общую основу. Тогда, имея $\alpha_1^1 = \alpha_3^1 = \varepsilon$, можно модифицировать α_2^2 в $\bar{\alpha}_2^1\alpha_2^2$, α_2^1 в ε и использовать предположение индукции.

(iv) Пусть $i = 2$, $\beta_2^1 \neq \varepsilon$. Этот случай фактически уже рассмотрен в подпункте (ii). Если $\alpha_3^1 = \varepsilon$, то остается использовать предположение индукции. Пусть $\alpha_3^1 \neq \varepsilon$. Остается повторить рассуждения последнего абзаца пункта (ii).

(v) Пусть $i = 3$. Поскольку $\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = \beta_1^1 = \beta_2^1 = \varepsilon$, и одно из α_3^1, β_3^1 равно ε, то остается использовать предположение индукции. На этом заканчивается рассмотрение пункта С. Теорема доказана.

Замечание 1. Учитывая, что слова вида u_i, α_j^i, β_j^i, v_i в теореме 1 могут быть пустыми, получаем возможность указывать другие эквивалентные формулировки теоремы 1, допуская произвольное расположение сомножителей α_1^i, α_2^i, α_3^i или β_1^i, β_2^i, β_3^i.

Теорема 1 имеет приложения к решению алгоритмических вопросов в абстрактной теории автоматов и теории схем программ. Укажем здесь некоторые из них [1].

1. Разрешима проблема эквивалентности для двусторонних конечных автоматов с выходом.

2. Разрешима проблема эквивалентности для конечных автоматов над бесконечными бинарными размеченными деревьями с выходной лентой.

3. Разрешима проблема эквивалентности для унарных линейных рекурсивных схем с засылками констант.

Для извлечения из теоремы 1 сформулированных результатов достаточно знакомства с «техникой следов», введенной в работе [3].

Отметим здесь только, что первый и третий из этих результатов являются следствиями второго. В то же время доказательство второго не отличается существенно от доказательства первого.

Замечание 2. Если теорема 1 верна в любой свободной группе, то результаты 1—3 можно перенести на соответствующие преобразователи, выходные слова которых рассматриваются как представители элементов свободной группы. При таком подходе можно получить, в частности, разрешимость проблемы эквивалентности для унарных линейных рекурсивных схем над свободной группой. Однако в настоящее время доказательство теоремы 1 для свободной группы отсутствует.

Замечание 3. Теорема 1, вообще говоря, ложна в произвольной группе и не может быть модифицирована путем увеличения коэффициента c. Это следует из того, что в группе $G = \langle a, b, c, d;\ a^n b^n c^n d^n = 1\ \ (n \in I)\rangle$ для любого $n \in N^+$ имеет место $a^n b^n c^n d^n = 1$ если и только, если $n \in I$ (соответствующее рассуждение аналогично приведенному в [4, с. 465]).

Замечание 4. Любая полугруппа, вложимая в группу и, в частности, свободная полугруппа с единицей, удовлетворяет следующему квазитождеству $u_1u_2 = v_1v_2$, $u_1\alpha_1u_2 = v_1\beta_1v_2$, $u_1\alpha_2u_2 = v_2\beta_2v_2$ влечет $u_1\alpha_1\alpha_2u_2 = v_1\beta_1\beta_2v_2$. Отсюда непосредственно следует вариант теоремы 1 при $s = r = 1$ для любой полугруппы, вложимой в группу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabin M., Scott D. Finite Automat and their dicision problems.—IBM Journ. Res. Devel., 1959, 3, № 2, p. 114—125.
2. Garland S., Zuckham D. Program schemas, Recursion schemas and formal Languages: Rep. UCLA—ENG—7154.— Los Angeles: Univ. (Cal.), 1971.— 67 p.— Рус. пер.: Гарлэнд С., Лакхэм Д. Стандартные схемы, рекурсивные схемы и формальные языки.—Кибернет. сб., 1976, вып. 13, с. 73—119.

[1] Употребляемые ниже понятия можно найти в [1, 2].

3. Трахтенброт Б. А. Тьюринговы вычисления с логарифмическим замедлением.— Алгебра и логика, 1964, 3, № 4, с. 33—48.
4. Шенфилд Дж. Математическая логика.— М.: Мир, 1975.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
5.X 1979 г.