УДК 519.21

Б. Мередов

О скорости сходимости к нормальному распределению в L_p

В данной статье доказано несколько теорем о приближении к нормальному распределению в пространстве L_p. Эти теоремы являются дополнениями или обобщениями результатов работ [1]—[5].

Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с общими функциями распределениями $V(x)$, характеристическими функциями $f(t)$, математическими ожиданиями $EX_0 = 0$ и $EX_0^2 = 1$.

Основным объектом исследования будет сумма: $(1 - v^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} v^k X_k$, $v \in]0; 1[$ — вещественный параметр.

Введем следующие обозначения:

$$F_v(x) = P\left\{(1 - v^2) \sum_{k=0}^{\infty} v^k X_k < x\right\}; \ \Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$\Delta_v(x) = F_v(x) - \Phi(x); \ W(y) = P\{|X_0| \leqslant y\};$$

$$\omega_v(\alpha) = (1 - v)^{\frac{1}{2}} \int_0^{(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}} y^3 dW(y) + (1 - v)^{\frac{\alpha}{2}} \int_{(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} y^{2+\alpha} dW(y);$$

$$\alpha \in [0; 1]; \ R(z) = \int_z^{\infty} y^2 dW(y).$$

Как обычно, в пространстве L_p введем норму следующим образом:

$$\| \Delta_v(x) \|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ если } p \in [1; \infty[;$$

$$\| \Delta_v(x) \|_\infty = \sup_{x \in R_1} |\Delta_v(x)|, \text{ если } p = \infty.$$

В работе [2] для оценки $|\Delta_v(x)|$ введена новая характеристика $\omega_v(\alpha)$ и изучены некоторые ее свойства. Наиболее интересным является случай $\omega_v(0)$, т. е. $\alpha = 0$. С учетом соответствующих результатов работ [2, 5] и неравенства

$$\| \Delta_v(x) \|_p \leqslant \| \Delta_v(x) \|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \ \| \Delta_v(x) \|_1^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

справедливом при любом $p \in [1; \infty]$, заключаем, что при $v \to 1$ $\| \Delta_v(x) \|_p \to 0$. Оценим скорость сходимости этой последовательности.

Теорема 1. *Для того чтобы при* $\delta \in]0; 1[$ *и* $p \in [1; \infty]$

$$\int_0^1 \frac{\| (1+|x|)^{2-\frac{1}{p}} \Delta_v(x) \|_p}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}} dv < \infty \tag{2}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$E|X_0|^{2+\delta} < \infty. \tag{3}$$

Теорема 2. *При* $\delta \in]0; 1[$ *и* $p \in [1; \infty]$

$$\| (1+|x|)^{2-\frac{1}{p}} \Delta_v(x) \|_p = O\left((1-v)^{\frac{\delta}{2}}\right), \qquad v \to 1 \tag{4}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$R(z) = O(z^{-\delta}), \quad z \to \infty. \tag{5}$$

Обозначим

$$\Lambda_{v,2} = (1-v^2) \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} \int\limits_{|x| > v^{-k}(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}} x^2 dV(x),$$

$$\Pi_{v,m} = (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} v^{mk} \int\limits_{|x| \leqslant v^{-k}(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}} x^m dV(x) \qquad (m = 3, 4);$$

C_j $(j = 1; 2; \ldots)$ — большие положительные постоянные, ε_j — малые положительные постоянные, A_j — абсолютные постоянные, θ_j — величины, по модулю не превосходящие единицы.

Соотношение $a_v \asymp b_v$ означает, что

$$0 < \liminf_{v \to 1} \frac{a_v}{b_v} \leqslant \limsup_{v \to 1} \frac{a_v}{b_v} < \infty.$$

Теорема 3. *При* $p \in [1; \infty[$ *справедливо неравенство*

$$\| \Delta_v(x) \|_p \geqslant \varepsilon_1 (\psi_{v,2} + (1-v^2)). \tag{6}$$

Теорема 4. *Если* $E|X_0|^3 = \infty$ *и выполнено условие* (C) *Крамера*

$$\limsup_{|t| \to \infty} |f(t)| < 1, \text{ то при } p \in [1; \infty] \ \| \Delta_v(x) \|_p \asymp \psi_{v,2}, \tag{7}$$

где $\psi_{v,2} = \Lambda_{v,2} + |\Pi_{v,3}| + \Pi_{v,4}$. Следующая теорема дополняет теорему 2 из работы [2].

Теорема 5. *При* $\delta \in [0; 1[$ *утверждения*

$$\int_0^1 \frac{\| \Delta_v(x) \|_\infty}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}} dv < \infty \tag{8}$$

$$\int_0^1 \frac{\omega_v(0)}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}} dv < \infty \tag{9}$$

эквивалентны и для их выполнения необходимо и достаточно выполнения условий (3), *а для случая* $\delta = 0$

$$E(X_0^2 \log(1+|X_0|)) < \infty. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть выполнено условие (3). С учетом теоремы 3, работы [2] и из выполнения условия (9) следует справедливость (2) при $p = \infty$. Для доказательства теоремы при $p = 1$ воспользуемся следствием 3 работы [3]

$$|\Delta_v(x)| \leqslant A_1 (1 + |x|)^{-3} (1 - v^2)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} v^{3k} \int_0^{v^{-k}(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}(1+|x|)} R(z)\, dz. \tag{11}$$

Тогда

$$\|(1 + |x|)\, \Delta_v(x)\|_1 \leqslant A_2 (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{(1-v)^{-\frac{1}{2}}} R(z)\, dz + A_3 \int_{(1-v)^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} z^{-1} R(z)\, dz. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{\|(1 + |x|)\, \Delta_v(x)\|_1}{(1 - v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\, dv \leqslant A_2 \int_0^1 (1 - v)^{-\frac{1+\delta}{2}} \int_0^{(1-v)^{-\frac{1}{2}}} R(z)\, dz dv +$$

$$+ A_3 \int_0^1 (1 - v)^{-\left(1+\frac{\delta}{2}\right)} \int_{(1-v)^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} z^{-1} R(z)\, dz dv = M_1 + M_2, \tag{13}$$

$$M_1 \leqslant C_1 \int_1^{\infty} y^{-\frac{(3-\delta)}{2}} \sum_{k=1}^{[y]} \int_{(k-1)^{\frac{1}{2}}}^{k^{\frac{1}{2}}} R(z)\, dz dy \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} y^{-\frac{(3-\delta)}{2}} \sum_{k=1}^{[y]} R\left((k-1)^{\frac{1}{2}}\right) \left(k^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1+\frac{\delta}{2}} R\left((k-1)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant C_4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\delta}{2}} \int_{(n-1)^{\frac{1}{2}} < |x| \leqslant n^{\frac{1}{2}}} x^2 dV(x) \leqslant$$

$$\leqslant C_5 E |X_0|^{2+\delta}. \tag{14}$$

Далее,

$$M_2 \leqslant \int_1^{\infty} x^{-1+\frac{\delta}{2}} \sum_{n=[x]}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left((n + 1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right) R\left(n^{\frac{1}{2}}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1+\frac{\delta}{2}} \sum_{n=k}^{\infty} n^{-1} R\left(n^{\frac{1}{2}}\right) = C_6 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} R\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \sum_{k=1}^{n} k^{-1+\frac{\delta}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\frac{\delta}{2}} R\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant C_8 E |X_0|^{2+\delta}. \tag{15}$$

Из (13) — (15) следует справедливость (2) при $p=1$. Если $p\in]1;\infty[$, то по неравенству Гельдера получим

$$\int_0^1 \frac{\|(1+|x|)^{2-\frac{1}{p}}\Delta_v(x)\|_p}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \frac{\|(1+|x|)^2\Delta_v(x)\|_\infty}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 \frac{\|(1+|x|)\Delta_v(x)\|_1}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_9^{1-\frac{1}{p}} C_{10}^{\frac{1}{p}} E|X_0|^{2+\delta}.$$

Пусть теперь выполнено условие (2). Тогда

$$\int_0^1 \frac{\|\Delta_v(x)\|_p}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv < \infty.$$

Но по теореме 3 $\|\Delta_v(x)\|_p \geqslant \varepsilon_1\Lambda_{v,2}$, и при $v\to 1$ $\Lambda_{v,2}=R((1-v)^{-\frac{1}{2}})(1+ + o(1))$, поэтому

$$\int_0^1 \frac{R((1-v)^{-\frac{1}{2}})}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv < \infty. \qquad (16)$$

Далее,

$$\int_0^1 \frac{R((1-v)^{-\frac{1}{2}})}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv = \int_1^\infty x^{-1+\frac{\delta}{2}} R(x^{\frac{1}{2}})\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-1+\frac{\delta}{2}} R((n+1)^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \varepsilon_2 \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{n^{\frac{1}{2}}<|x|\leqslant(n+1)^{\frac{1}{2}}} x^2 dV(x) \sum_{k=2}^{n} k^{-1+\frac{\delta}{2}} \geqslant \varepsilon_3 E|X_0|^{2+\delta}. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что выполнено условие (3).

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнено условие (5). При $p=\infty$ утверждение (4) следует из [2]. С учетом неравенства (12) получаем $\|(1+|x|)\Delta_v(x)\|_1 = O((1-v)^{\frac{\delta}{2}})$, $v\to 1$.

Если же $p\in]1;\infty[$, то

$$\|(1+|x|)^{2-\frac{1}{p}}\Delta_v(x)\|_p \leqslant \|(1+|x|)^2\Delta_v(x)\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \|(1+|x|)\Delta_v(x)\|_1^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O((1-v)^{\frac{\delta}{2}}), \qquad v\to 1.$$

Справедливость обратного утверждения теоремы 2 доказывается с помощью теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Введем функцию

$$\hat{y}(t)=\begin{cases} t(\gamma-t)e^{\frac{t^2}{2}}, & \text{если } t\in[0;\gamma],\\ 0, & \text{если } t\,\overline{\in}\,[0;\gamma],\end{cases}$$

и положим $y(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\iota tx}\hat{y}(t)\,dt,\ f_v(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\iota tx}dF_v(x)$.

Поскольку

$$|y(x)|\leqslant\frac{C_{11}\gamma}{1+x^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\iota tx}\Delta_v(x)\,dx=\frac{f_v(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}}{-it},$$

то отсюда следует, что $y(x)\in L_p,\ \Delta_v(x)\in L_p,\ p\in[1;\infty[$.

Воспользовавшись равенством Парсеваля, получим

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta_v(x)\,y(x)\,dx\right|=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(f_v(t)-e^{-\frac{t^2}{2}})}{-it}\hat{y}(t)\,dt\right|. \tag{18}$$

Легко заметить, что левая часть равенства (18) не превосходит $C_{12}\|\Delta_v(x)\|_p$, а правая часть имеет вид

$$M_3=\left|\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{u}e^{\frac{t^2}{2}}(f_v(t)-e^{-\frac{t^2}{2}})\,dtdu\right|.$$

Пусть $\gamma\leqslant C$ и

$$\pi_v(\iota t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\{\iota tv^k(1-v^2)^{\frac{1}{2}}x\}-\sum_{n=0}^{2}\frac{(\iota tv^k(1-v^2)^{\frac{1}{2}}x)^n}{n!}\right)dV(x).$$

Тогда в соответствии с леммой работы [6] получим

$$M_3=\left|\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{u}\pi_v(\iota t)\,dtdu\right|+\theta_1(\psi^2_{v,2}+(1-v^2)). \tag{19}$$

Для оценки снизу этого интеграла (обозначим его через M_4) воспользуемся неравенством (см. неравенство (26) работы [7])

$$K(x;p)=(-1)^{p+1}\left(\cos x-\sum_{j=0}^{p}\frac{(-x^2)^j}{(2j)!}\right)\geqslant\varepsilon_4\frac{x^{2p+2}}{1+x^2}. \tag{20}$$

($p\geqslant1$ — целое). Также очевидно, что при всех γ, $\gamma\in[0;C]$

$$M_4\geqslant\max\left(\left|\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{u}\operatorname{Re}\pi_v(\iota t)\,dtdu\right|;\ \left|\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{u}\operatorname{Im}\pi_v(\iota t)\,dtdu\right|\right). \tag{21}$$

В частности, при $\gamma=1$ согласно (20), имеем

$$\left|\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{u}\operatorname{Re}\pi_v(\iota t)\,dtdu\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(v^k(1-v^2)^{\frac{1}{2}}x;2)\frac{dV(x)}{(v^k(1-v^2)^{\frac{1}{2}}x)^2}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon_5(\Lambda_{v,2}+\Pi_{v,4}). \tag{22}$$

Далее,

$$\left|\int_0^\gamma\int_0^u \operatorname{Im}\pi_v(\iota t)\,dtdu\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\gamma K\left(v^k(1-v^2)^{\frac{1}{2}}ux;\,1\right)\frac{dudV(x)}{v^k(1-v^2)\,x}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_6\,|\,\Pi_{v,3}\,|. \tag{23}$$

Из (18) — (23) следует (6).

Доказательство теоремы 4. Нижняя оценка при $p=\infty$ получена в [2]. В случае $p\in[1;\infty[$ из теоремы 3 следует

$$\|\,\Delta_v(x)\,\|_p \geqslant \psi_{v,2}\left(\varepsilon_1+\frac{1-v^2}{\psi_{v,2}}\right). \tag{24}$$

Так как $E\,|\,X_0|^3=\infty$, то $\lim\limits_{v\to1}\dfrac{\psi_{v,2}}{1-v^2}=\infty$. Следовательно, из (24) следует нижняя оценка при $p\in[1;\infty[$. При $p=\infty$ верхняя оценка получена в [2]. Докажем $\|\,\Delta_v(x)\,\|_1\leqslant C_{12}\psi_{v,2}$. С учетом неравенства (11) получим

$$\|\,\Delta_v(x)\,\|_1\leqslant A_3(1-v^2)^{\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}v^{3k}\int_0^{v^{-k}(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}} R(z)\,dz + A_4\Lambda_{v,2}\leqslant$$

$$\leqslant A_5\Lambda_{v,2}+A_6\,|\,\Pi_{v,3}\,|\leqslant C_{12}\psi_{v,2}.$$

Верхняя оценка при $p\in\,]1;\infty[$ немедленно следует из (1).

Доказательство теоремы 5. Равносильность условий (8), (3), (10) доказана в [2]. Докажем равносильность условий (9), (3), (10). Если выполнено (3), то использование неравенств (см. неравенство (20) работы [2])

$$\omega_v(0)\leqslant 2C(1-v)^{\frac{1}{2}}\int_0^{(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}} R(z)\,dz$$

и (14) приводит к следующему неравенству:

$$\int_0^1\frac{\omega_v(0)}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv\leqslant C_{13}E\,|\,X_0\,|^{2+\delta}.$$

Если же выполнено условие (10), то аналогично можно получить

$$\int_0^1\frac{\omega_v(0)}{1-v}\,dv\leqslant C_{14}E\,(X_0^2\log(1+|\,X_0\,|)).$$

Теперь, если выполнено условие (9), то из определения $\omega_v(0)$ следует

$$\int_0^1\frac{R\left((1-v^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{(1-v)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,dv<\infty.$$

В дальнейшем достаточно воспользоваться неравенством (17). Аналогично можно получить условие (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerber A. The discounted central limit theorem and its Berry—Eseen analogue.— Ann. Math. Statist., 1971, **41**, № 1, p. 389—392.
2. Азларов Т. А., Мередов Б. Некоторые оценки в предельной теореме для суммирования случайных величин по Абелю.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1977, № 5, с. 7—15.
3. Мередов Б. Оценки в предельной теореме для суммирования случайных величин по Абелю.— В кн.: Предельные теоремы и математическая статистика. Ташкент: Фан, 1976, с. 71—81.
4. Мередов Б. О некоторых оценках остаточного члена в центральной предельной теореме для одной схемы суммирования независимых случайных величин. — В кн.: Тез. докл. II Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1977, т. 2, с. 25—26.
5. Мередов Б. Теорема Линдеберга — Феллера для одной схемы суммирования независимых случайных величин.— Изв. АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН, 1977, № 4, с. 12—16.
6. Мередов Б. Об одной оценке остаточного члена в локальной предельной теореме для плотностей.— Изв. АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН, 1979, № 2, с. 3—8.
7. Розовский Л. В. О сходимости функций распределения последовательности сумм независимых случайных величин к нормальному закону в L_p.— Лит. мат. сб., 1976, **16**, № 1, с. 193—206.

Туркменский
государственный университет

Поступила в редакцию
12.XI 1979 г.