УДК 517.5

В. Х. Навоян

О непрерывности конформной емкости пространственного конденсатора

1. В некоторых вопросах теории функций важную роль играет свойство непрерывности различных конформных инвариантов. Конформная емкость конденсатора, введенная в работе [1], является довольно общим конформным инвариантом, совпадающим с модулем семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора. Поэтому естественно попытаться установить свойство непрерывности конформной емкости при как можно более общих предположениях, выраженных в геометрических терминах.

В настоящей работе устанавливается более общий результат по сравнению с работами [2—7] о непрерывности конформной емкости пространственного конденсатора, формулируемый в чисто геометрических терминах.

2. Пусть R^n $(n \geqslant 3)$ — n-мерное евклидово пространство, а $\overline{R}^n$ — пространство Мебиуса, полученное присоединением к R^n бесконечно удаленной точки.

Для произвольного множества $A \subset \overline{R^n}$ обозначим через ∂A, CA, $r(x, A)$, $d(A)$, $m_k(A)$ соответственно границу, дополнение, евклидово расстояние от точки x до A, нижнюю грань диаметров компонент связности множества A и его k-мерную меру Хаусдорфа.

Ограничимся рассмотрением случая $n = 3$, хотя рассуждения почти дословно переносятся на пространства любой размерности.

Конденсатором R называется область в R^3, чье дополнение состоит из двух различных непересекающихся замкнутых множеств E и F, которые называются пластинами конденсатора. Конформной емкостью конденсатора называется величина

$$\operatorname{Cap} R = \inf_u \iiint\limits_{R^3} |\operatorname{grad} u|^3 \, dm_3,$$

где нижняя грань берется над всеми непрерывными в $\overline{R}^3$ функциями из класса ACL (абсолютно непрерывных на почти всех прямых, параллельных координатным осям), удовлетворяющими условиям: $u=0$ на E и $u=1$ на F. Такие функции называются допустимыми для R.

Пусть Γ — семейство произвольных кривых в $\overline{R}^3$. Неотрицательную измеримую по Лебегу функцию $\rho\in L^3(R^3)$ назовем допустимой метрикой для Γ, если для любой кривой $\gamma\in\Gamma$ справедливо неравенство $\underline{\int}\rho dm_1\geqslant 1$ (здесь и далее $\underline{\int}$ — нижний интеграл Дарбу).

Модулем (конформным или 3-модулем) семейства Γ называется величина $M(\Gamma)=\inf\limits_{\rho}\iiint\limits_{R^3}\rho^3 dm_3$, где нижняя грань берется по всем метрикам, допустимым для Γ.

В общепринятых определениях модуля семейства кривых (см., например, [4, 8—10]) по существу заранее отбрасываются кривые, которые не являются локально спрямляемыми, поскольку для таких кривых линейный интеграл Лебега не имеет смысла. Между тем, при квазиконформных или более общих отображениях спрямляемые кривые могут переходить в кривые не являющиеся локально спрямляемыми. Поэтому в определении модуля отображенного семейства, вообще говоря, не участвует часть кривых, являющихся образами спрямляемых.

В определении, данном П. М. Тамразовым в работах [11, 12], которого мы здесь и придерживаемся, участвуют все (в том числе и не являющиеся локально спрямляемыми) кривые семейства. И поскольку нужные нам оценки нижнего интеграла Дарбу всегда получаются так же, как и при других определениях линейного интеграла, то нет необходимости добиваться того, чтобы линейные интегралы брались в смысле Лебега.

Можно показать, что $M(\Gamma)=\operatorname{Cap}R$, где Γ — семейство всех кривых в R, соединяющих E и F [9, 13].

Поскольку модуль семейства кривых является конформным инвариантом, то, не уменьшая общности, будем считать границу ∂R компактной.

Лемма 1. *Пусть Γ — семейство всех кривых в R, соединяющих пластины E и F конденсатора, а ρ_0 — допустимая метрика для Γ.*

Тогда для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если P и Q — концы некоторой кривой β и $r(P,E)<\delta$, $r(Q,F)<\delta$, то

$$\underline{\int\limits_{\beta}}\rho_0 dm_1\geqslant 1-\varepsilon. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть x_0 произвольная точка из E, а S_r—сфера $|x-x_0|=r$. Положим $L(r)=\inf\limits_{\gamma}\underline{\int\limits_{\gamma}}\rho_0 dm_1$, где нижняя грань берется по всем кривым γ, соединяющим F с S_r. Докажем, что

$$a\equiv\lim_{r\to 0}L(r)\geqslant 1. \qquad (2)$$

Из (2) следует (1), так как ∂R компактна, и аналогичные рассуждения можно применить к F.

Предположим $a<1$. Так как $\rho_0\in L^3(R^3)$, то существует такая последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n\to 0$, что

$$r_n\iint\limits_{S_{r_n}}\rho_0^3 dm_2\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

(ср. с доказательством теоремы, приведенной ниже).

Согласно одной лемме Геринга ([9], лемма 1), которая справедлива и для более общего класса функций — функций, измеримых по Лебегу, любые две точки сферы S_{r_n} можно соединить такой круговой дугой $\alpha_n\subset S_{r_n}$, что

$$\Big(\int\limits_{\alpha_n}\rho_0 dm_1\Big)^3\leqslant Cr_n\iint\limits_{S_{r_n}}\rho_0^3 dm_2,$$

где C — абсолютная константа.

Выберем такую подпоследовательность $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(Cr_{n_k}\iint\limits_{S_{r_{n_k}}}\rho_0^3 dm_2\right)^{\frac{1}{3}}<\frac{1-a}{2}.$$

Тогда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha_{n_k}}\rho_0 dm_1<\frac{1-a}{2}$.

Для γ_k, соединяющих $S_{r_{n_{k+1}}}$ и $S_{r_{n_k}}$, имеем $\inf\limits_{\gamma_k}\int\limits_{\gamma_k}\rho_0 dm_1\leqslant L(r_{n_{k+1}})-$ $-L(r_{n_k})$.

Таким образом, можно построить кривую γ, соединяющую F и x_0, такую что

$$\int\limits_{\gamma}\rho_0 dm_1\leqslant L(r_{n_1})+\sum_{k=1}^{\infty}(L(r_{n_{k+1}})-L(r_{n_k}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha_{n_k}}\rho_0 dm_1+\frac{1-a}{4}<a+\frac{1-a}{2}+\frac{1-a}{4}=\frac{a+3}{4}<1.$$

Это противоречие доказывает (2). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть последовательность областей* $\{R_n\}$ *сходится к области* R *как к ядру. Тогда* 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in CR_n} r(x, CR)=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$, где $\sigma_n=\sup\limits_{x\in\partial R} r(x,\partial R_n)$.

Доказательство. Из определения сходимости областей к своему ядру следует 1) и равенство $\lim\limits_{n\to\infty} r(x_0,\partial R_n)=0$ для каждой точки $x_0\in\partial R$. Покажем, что отсюда следует справедливость утверждения 2). Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Каждую точку $x\in\partial R$ окружим шарами радиуса $\varepsilon/2$. Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие: шары с центрами в некоторых точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Для любого x_i $(i=1,\ldots,m)$ существует такое n_i, что для всех $n>n_i$ в $\varepsilon/2$-окрестности x_i лежат граничные точки всех R_n. Обозначим $\max(n_1, n_2, \ldots, n_m)=N$. Ясно, что тогда для всех $n>N$ и любых $x\in\partial R$ выполняется неравенство $r(x,\partial R_n)<\varepsilon$. Отсюда следует $\sup\limits_{x\in\partial R} r(x,\partial R_n)\leqslant\varepsilon$.

Ввиду произвольности ε получаем 2). Лемма 2 доказана.

Теорема. *Пусть* R *— конденсатор в* R^3 *с пластинами* E и F, *а* $\{R_n\}$ *— последовательность конденсаторов с пластинами* E_n *и* F_n, *сходящаяся к* R *как к ядру. Если выполнено условие*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{d(E_n\cup F_n)}{4\sigma_n}\geqslant 1, \tag{3}$$

где σ_n *такое же, как в лемме* 2, *то тогда справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} M(\Gamma_n)=M(\Gamma), \tag{4}$$

где Γ *— семейство всех кривых, соединяющих* E *и* F, *а* Γ_n *—* E_n и F_n.

Если $E_n(F_n)$ *связные, то в числителе левой части* (3) *можно записать* $d(F_n)(d(E_n))$. *В случае связности* E_n *и* F_n, *условие* (3) *можно опустить.*

Доказательство. Сначала заметим, что если множества E_n связные и $\varliminf_{n\to\infty} \frac{d(E_n)}{4\sigma_n} < 1$, то на основании 2) леммы 2 $\lim_{n\to\infty} d(E_n) = 0$. Отсюда следует, что E связное и $d(E) = 0$, т. е. E вырождается в некоторую точку x_0. Тогда из рассуждений Херша ([14, глава 1, § 2, D, c]) следует, что $M(\Gamma) = 0$. Покажем, что $M(\Gamma_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Существует такое N, что при $n > N$ все E_n лежат в шаре $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$. Любая кривая $\gamma \in \Gamma_n$, $n > N$, пересекает сферу $|x - x_0| = \varepsilon$. Определим метрику

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(\ln \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)|x - x_0|}, & \text{если } \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0; \\ 0 & \text{при всех остальных значениях } x. \end{cases}$$

Легко заметить, что ρ допустима для Γ_n. Имеем

$$M(\Gamma_n) \leqslant \iiint_{R^3} \rho^3 dm_3 = \frac{4\pi}{\ln^2 \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}.$$

Отсюда следует: $\varlimsup_{n\to\infty} M(\Gamma_n) \leqslant \dfrac{4\pi}{\ln^2 \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}$. Ввиду произвольности ε получаем $\lim_{n\to\infty} M(\Gamma_n) = 0$.

Таким образом, осталось рассмотреть лишь случай, когда выполнено (3). Докажем неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} M(\Gamma_n) \leqslant M(\Gamma). \tag{5}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем допустимую для Γ метрику ρ такую, что

$$\iiint_{R^3} \rho^3 dm_3 \leqslant M(\Gamma) + \varepsilon.$$

Согласно утверждению 1) леммы 2 и лемме 1 существует такое N, что для всех $n > N$ и для любой кривой $\gamma_n \in \Gamma_n$ имеет место неравенство

$$\int_{\gamma_n} \rho\, dm_1 \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Тогда метрика $\rho_* = \dfrac{\rho}{1 - \varepsilon}$ допустима для всех Γ_n, $n > N$. Имеем

$$M(\Gamma_n) \leqslant \iiint_{R^3} \rho_*^3 dm_3 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^3} \iiint_{R^3} \rho^3 dm_3 \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^3} (M(\Gamma) + \varepsilon),$$

откуда

$$\varlimsup_{n\to\infty} M(\Gamma_n) \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^3} (M(\Gamma) + \varepsilon).$$

Устремляя ε к нулю, получаем (5).

Остается показать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} M(\Gamma_n) \geqslant M(\Gamma). \tag{6}$$

Снова зафиксируем $\varepsilon > 0$. При любом n существует допустимая для Γ_n метрика ρ_n, для которой выполнено условие

$$\iiint_{R^3} \rho_n^3 dm_3 \leqslant M(\Gamma_n) + \frac{1}{n}.$$

Выберем такую последовательность $\{n_k\}$, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} M(\Gamma_{n_k}) = \varliminf\limits_{n\to\infty} M(\Gamma_n)$, $\sigma_{n_k} > 0$ и $\dfrac{\sigma_{n_{k-1}}}{\sigma_{n_k}} > 2$. Пусть k_0 настолько велико, что при всех $k \geqslant k_0$ имеют место следующие неравенства:

$$d(E_{n_k} \cup F_{n_k}) \geqslant 4\sigma_{n_k}, \quad 2\sigma_{n_{k-1}} < r(E, F), \quad \iiint\limits_{|x-x_1| \leqslant \sigma_{n_{k-1}}} \rho_{n_k}^3 dm_3 < \varepsilon,$$

где x_1 — произвольная точка из R^3. Такое k_0 существует согласно (3), условию $\rho \in L^3(R^3)$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Фиксируем $k \geqslant k_0$ и произвольную кривую $\gamma \in \Gamma$. На кривой γ можно указать точку x_1, удаленную от E на расстояние, не большее, чем число $1/2\sigma_{n_k}$. Тогда x_1 удалено от E_{n_k} на расстояние, не большее, чем число $3/2\sigma_{n_k}$. Легко видеть, что всякая сфера S_r: $|x - x_1| = r$, где $\dfrac{3}{2}\sigma_{n_k} \leqslant r \leqslant \leqslant \min\left(\dfrac{d(E_{n_k} \cup F_{n_k})}{2}, \sigma_{n_{k-1}}\right) \equiv D_k$ пересекает кривую γ и множество E_{n_k}, но не имеет общих точек с F.

Имеем

$$\varepsilon \geqslant \iiint\limits_{|x-x_1| \leqslant \sigma_{n_{k-1}}} \rho_{n_k}^3 dm_3 \geqslant \int\limits_{\frac{3}{2}\sigma_{n_k}}^{D_k} \left(\iint\limits_{S_r} \rho_{n_k}^3 dm_2\right) dr \geqslant \frac{D_k}{8} \inf_{\frac{3}{2}\sigma_{n_k} \leqslant r \leqslant D_k} \iint\limits_{S_r} \rho_{n_k}^3 dm_2.$$

Отсюда видно, что существует такое r_k, что $\dfrac{3}{2}\sigma_{n_k} \leqslant r_k \leqslant D_k$ и

$$\iint\limits_{S_{r_k}} \rho_{n_k}^3 dm_2 < \frac{16\varepsilon}{D_k}. \tag{7}$$

На основании упомянутой леммы Геринга кривую γ можно соединить с E_{n_k} круговой дугой α_k, лежащей на сфере $S_{r_k}: |x - x_1| = r_k$, $\dfrac{3}{2}\sigma_{n_k} \leqslant \leqslant r_k \leqslant D_k$, такой что

$$\left(\int\limits_{\alpha_k} \rho_{n_k} dm_1\right)^3 \leqslant C r_k \iint\limits_{S_{r_k}} \rho_{n_k}^3 dm_2,$$

где C — абсолютная постоянная.

Учитывая (7), получаем

$$\int\limits_{\alpha_k} \rho_{n_k} dm_1 < \left(\frac{16\varepsilon}{D_k} C r_k\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant (16\varepsilon C)^{\frac{1}{3}} \equiv C_1 \varepsilon^{1/3}.$$

Аналогично кривую γ можно соединить с F_{n_k} такой дугой β_k, что

$$\int\limits_{\beta_k} \rho_{n_k} dm_1 < (16\varepsilon C)^{\frac{1}{3}} \equiv C_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Из частей кривой γ и дуг α_k, β_k можно сконструировать кривую $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{n_k}$, для которой

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}} \rho_{n_k} dm_1 < \int\limits_{\gamma} \rho_{n_k} dm_1 + \int\limits_{\alpha_k} \rho_{n_k} dm_1 + \int\limits_{\beta_k} \rho_{n_k} dm_1 \leqslant \int\limits_{\gamma} \rho_{n_k} dm_1 + 2C_1 \varepsilon^{1/3}.$$

Поскольку ρ_{n_k} допустима для Γ_{n_k}, то $\int\limits_{\bar{\gamma}} \rho_{n_k} dm_1 > 1 - 2C_1\varepsilon^{1/3}$. Ввиду произвольности γ метрика $\rho_* = \dfrac{\rho_{n_k}}{1 - 2C_1\varepsilon^{\frac{1}{3}}}$ допустима для Γ. Таким образом, имеем

$$M(\Gamma) \leqslant \iiint\limits_{R^3} \rho_*^3 dm_3 = \frac{1}{1 - 2C_1\varepsilon^{1/3}} \iiint\limits_{R^3} \rho_{n_k}^3 dm_3 <$$

$$< \frac{1}{1 - 2C_1\varepsilon^{1/3}} \left(M(\Gamma_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \right).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, ввиду произвольности ε, получаем (6). Из (5) и (6) следует (4). Теорема доказана.

Непосредственно из доказательства теоремы видно, что ввиду монотонности модуля семейства кривых утверждение (4) имеет место и в следующих случаях: а) когда, начиная с некоторого номера, все $\sigma_n \equiv 0$; и б) когда существует нулевая подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\sigma_{n_k} = 0$, а для ненулевых членов последовательности $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняется условие (3) (даже если одновременно все $d(E_{n_k} \cup F_{n_k}) = 0$).

Заметим, что в случае связности E_n и F_n получаем теорему 4.5′ главы 2 [7], частным случаем которой является лемма 6, п. 11 работы [6].

Легко построить пример нарушения непрерывности конформной емкости конденсатора, когда не выполняются условия теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Loewner C. On the conformal capacity in space.— J. Math., Mech., 1959, 8, p. 411—414.
2. Хажалия Г. Я. О конформном отображении двусвязных областей на кольцо.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1937, № 1, с. 89—107.
3. Gehring F. A remark on the moduli of rings.— Comm. Math. Helv., 1961, 36, p. 42—46.
4. Wolontis W. Properties of conformal invariants.— Amer. J. Math., 1952, 74, p. 587—606.
5. Тамразов П. М. О непрерывности некоторых конформных инвариантов.— Укр. мат. журн., 1966, 18, № 6. с. 78—84.
6. Gehring F. Rings and quasiconformal mappings in space.— Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 103, № 3, p. 353—393.
7. Сычев А. В. Пространственные квазиконформные отображения.— Новосибирск. Изд-во Новосиб. ун-та, 1975.— 99 с.
8. Fuglede B. Extremal length and functional completion.— Acta Math., 1957, 98, p. 171—219.
9. Gehring F. Extremal length definitions for the conformal capacity of rings in space.— Michigan Math. J., 1962, 9, p. 137—150.
10. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 268 с.
11. Тамразов П. М. Метод экстремальной метрики и конформное отображение: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат.наук.- Киев, 1963.— 23 с.
12. Тамразов П. М. Теорема про лінійні інтеграли для екстремальної довжини.— Доп. АН УРСР. Сер. А., 1966, № 1, с. 51—54.
13. Ziemer W. Extremal length and conformal capacity.— Trans. Amer. Math. Soc., 1967, 126, № 3, p. 460—473.
14. Hersch J. Longueurs extremales et theorie des fonctions.— Comm. Math. Helv., 1955, 29, p. 301—337.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
28.II 1980 г.