УДК 517.9

Чан Ким Тьи

Асимптотический метод построения решений дифференциальных уравнений N-го порядка с медленно меняющимися параметрами (автономный случай)

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение N-го порядка с медленно меняющимися коэффициентами

$$x^{(N)}(t)+\alpha_1(\tau)\,x^{(N-1)}(t)+\ldots+\alpha_{N-1}(\tau)\,x^{(1)}(t)+\alpha_N(\tau)\,x(t)=$$
$$=\varepsilon F(\tau, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(N)}(t), \varepsilon),\quad x^{(k)}=\frac{d^kx}{dt^k},\tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $\tau=\varepsilon t$ — медленное время, $t\in[0,\ T]$, T — конечное значение.

Предположим, что для любых $\tau\in[0,\ L]$, $L=\varepsilon T$, коэффициенты $\alpha_i(\tau)$ $(i=\overline{1,n})$ и функция $F(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \varepsilon)$ имеют достаточное число производных по всем аргументам, характеристическое уравнение

$$\lambda^N+\alpha_1(\tau)\,\lambda^{N-1}+\ldots+\alpha_{N-1}(\tau)\,\lambda+\alpha_N(\tau)=0\tag{2}$$

для некоторого постоянного τ имеет одну пару чисто мнимых корней, а остальные корни имеют отрицательную вещественную часть с достаточно большой абсолютной величиной.

Одновременно с уравнением (1) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{(N)}(t)+\alpha_1(\tau)\,x^{(N-1)}(t)+\ldots+\alpha_{N-1}(\tau)\,x^{(1)}(t)+\alpha_N(\tau)\,x(t)=0,\tag{3}$$

которое получено из (1) в предположении, что τ — постоянный параметр и $\varepsilon=0$. Уравнение (3) имеет семейство частных периодических решений, зависящее от двух параметров

$$x=a\cos\varphi,\tag{4}$$

где $\frac{da}{dt}=0,\ \frac{d\varphi}{dt}=\Omega(\tau)=\mathrm{const}$.

Решение уравнения (1) при достаточно малых ε ищем в виде разложения

$$x=a\cos\varphi+\varepsilon u_1(\tau, a, \varphi)+\varepsilon^2u_2(\tau, a, \varphi)+\ldots\tag{5}$$

где $u_1(\tau, a, \varphi)$, $u_2(\tau, a, \varphi)$, ... — периодические функции переменной φ с периодом 2π, а величины a и φ как функции времени определяются из дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\varepsilon A_1(\tau, a)+\varepsilon^2A_2(\tau, a)+\ldots,\\ \frac{d\varphi}{dt}&=\Omega(\tau)+\varepsilon B_1(\tau, a)+\varepsilon^2B_2(\tau, a)+\ldots\end{aligned}\tag{6}$$

Таким образом, построение приближенных решений уравнения (1) сводится к определению функций

$$u_1(\tau, a, \varphi), u_2(\tau, a, \varphi), \ldots, A_1(\tau, a, \varphi), A_2(\tau, a, \varphi), \ldots, B_1(\tau, a, \varphi), B_2(\tau, a, \varphi), \ldots\tag{7}$$

После вычислений получаем решение уравнения (1) в первом приближении

$$x=a\cos\varphi,\tag{8}$$

и в первом улучшенном приближении

$$x = a\cos\varphi + \varepsilon \sum_{m\neq 1} \frac{(L_1F_{mc} - L_2F_{ms})\cos m\varphi + (L_1F_{ms} + L_2F_{mc})\sin m\varphi}{L_1^2 + L_2^2}, \quad (9)$$

где a и φ — решения дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \frac{S_1F_{1c} + S_2F_{1s}}{S_1^2 + S_2^2}, \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega(\tau) + \varepsilon \frac{S_2F_{1c} - S_1E_{1s}}{a(S_1^2 + S_2^2)}.$$

Здесь F_{mc}, F_{ms} — коэффициенты разложения в ряд Фурье по переменной функции

$$F_0(\tau, a, \varphi) = F\left(\tau, a\cos\varphi, \Omega a\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \ldots, \Omega^k a\cos\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right), 0\right) -$$

$$- \frac{a}{2}\sum_{k=1}^{N} k\alpha_{N-k}\frac{d\Omega^{k-1}}{d\tau}\sin\left(\varphi + k\frac{\pi}{2}\right),$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N} k\alpha_{N-k}(\tau)\,\Omega^{k-1}(\tau)\sin k\frac{\pi}{2}, \qquad S_2 = \sum_{k=2}^{N} k\alpha_{N-k}(\tau)\,\Omega^{k-1}(\tau)\cos k\frac{\pi}{2},$$

$$L_1 = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{N-k}(\tau)\,\Omega^{k}(\tau)\,m^k\cos k\frac{\pi}{2}, \qquad L_2 = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{N-k}(\tau)\,\Omega^{k}(\tau)\,m^k\cos k\frac{\pi}{2}.$$

Построение более высоких приближений для решения уравнения (1) не вызывает принципиальных затруднений.

Рассмотрим уравнение (1) в предположении, что характеристическое уравнение (2) для некоторого постоянного τ имеет l пар чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\Omega_s(\tau)$, $s = \overline{1, l}$, $l > 1$, и не существует соотношения типа

$$\sum_{s=1}^{l} q_s\Omega_s(\tau) = 0, \quad \tau = \text{const}, \quad (11)$$

где q_s — целые числа и хотя бы одно из которых ненулевое.

Предположим, что остальные корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть с достаточно большой абсолютной величиной.

В данном случае уравнение (3) имеет зависящее от l параметров семейство частных почти периодических решений

$$x = \sum_{s=1}^{l} a_s\cos\varphi_s. \quad (12)$$

Здесь $\dfrac{da_s}{dt} = 0$, $\dfrac{d\varphi_s}{dt} = \Omega(\tau)$, $s = \overline{1, l}$.

Семейство частных решений уравнения (1) при достаточно малых ε ищем в виде разложения

$$x = \sum_{s=1}^{l} a_s\cos\varphi_s + \varepsilon u_1(\tau, a, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \varphi) + \ldots, \quad (13)$$

где $a = (a_1, \ldots, a_l)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$. Функции $u_i(\tau, a, \varphi)$ — периодические по φ_s $(s = \overline{1, l})$ с периодом 2π, ограниченные при конечных значениях a. Кроме того, они не должны содержать членов, знаменатели которых могут на рассматриваемом интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$ обратиться в ноль. Это условие равносильно требованию отсутствия в u_i членов $\sin\varphi_s$ и $\cos\varphi_s$. Величины a_s, φ_s как функции времени определяются уравнениями

$$\frac{da_s}{dt} = \varepsilon A_{1s}(\tau, a) + \varepsilon^2 A_{2s}(\tau, a) + \ldots,$$
$$\frac{d\varphi_s}{dt} = \Omega_s(\tau) + \varepsilon B_{1s}(\tau, a) + \varepsilon^2 B_{2s}(\tau, a) + \ldots \tag{14}$$

После вычислений первого приближения получаем следующие формулы:

$$A_{1s} = \frac{2}{(2\pi)^l (L_{1s}^2 + L_{2s}^2)} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_0 (L_{1s}\cos\varphi_s + L_{2s}\sin\varphi_s)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_l,$$
$$B_{1s} = \frac{2}{(2\pi)^l (L_{1s}^2 + L_{2s}^2) a_s} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_0 (L_{2s}\cos\varphi_s - L_{1s}\sin\varphi_s)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_l, \tag{15}$$

где

$$L_{1s} = \sum_{k=1}^{N} k\Omega_s^{k-1}(\tau)\, \alpha_{N-k}(\tau) \sin k\frac{\pi}{2}, \qquad L_{2s} = \sum_{k=1}^{N} k\Omega_s^{k-1}(\tau)\, \alpha_{N-k}(\tau) \cos k\frac{\pi}{2},$$

$$F(\tau, a, \varphi) = F\left(\tau, \sum_{s=1}^{l} a_s \cos\varphi_s, \sum_{s=1}^{l} \Omega_s a_s \cos\left(\varphi_s + \frac{\pi}{2}\right), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \sum_{s=1}^{l} \Omega_s^N a_s \cos\left(\varphi_s + N\frac{\pi}{2}\right), 0\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} k\alpha_{N-k} \sum_{s=1}^{l} a_s \frac{d\Omega_s^{k-1}}{d\tau} \times$$
$$\times \sin\left(\varphi_s + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Для q_s, удовлетворяющих неравенствам $q_1^2 + \ldots + (q_s \pm 1)^2 + \ldots + q_l^2 \neq 0$, имеем следующее выражение:

$$u_{1q} = \frac{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i(q_1\varphi_1 + \ldots + q_l\varphi_l)}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_l}{(2\pi)^l \sum_{k=0}^{N} \alpha_{N-k}(\tau)\, i^k (q_1\Omega_1 + \ldots + q_l\Omega_l)^k}, \tag{16}$$

$$u_1(\tau, a, \varphi) = \sum_q u_{1q} e^{i(q_1\varphi_1 + \ldots + q_l\varphi_l)}.$$

Таким образом, найдены величины u_{1q}, A_{1s}, B_{1s} и, следовательно, первое приближение решения уравнения (1). Не представляет принципиальных трудностей получить более высокие приближения решений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 495 с.
2. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.; Наука, 1964.— 424 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
4.XI 1980 г.