УДК 517.983.26

В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов

Об одном свойстве компактных операторов в пространстве суммируемых функций

В работе [1] показано, что для любого линейного компактного оператора A в пространстве $C_{[0,1]}$ непрерывных на отрезке функций выполняется равенство $\| I + A \| = 1 + \| A \|$, где I — тождественный оператор, которое, как замечено в [2], полезно в некоторых задачах теории приближения (см. также [3, 4]).

В настоящей заметке доказываем аналогичный факт для пространства $L_{(0,1)}$. В дальнейшем всюду $\| f \| \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 | f(t) | \, dt$, и для оператора A, действующего в $L_{(0,1)}$, $\| A \| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} \| Af \|$.

Теорема. *Для любого компактного линейного оператора A, действующего в пространстве $L(0, 1)$,*

$$\| I + A \| = 1 + \| A \|. \tag{1}$$

Доказательство. Так как компактный оператор аппроксимируется конечномерными, то равенство (1) достаточно доказать для конечномерных операторов. Итак, пусть область значений оператора A — конечномерное подпространство с базисом $\{e_1(x), e_2(x), \ldots, e_n(x)\}$, т. е. оператор A имеет вид

$$(Af)(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k(x) \int_0^1 f(t) \varphi_k(t) \, dt,$$

где $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторый набор существенно ограниченных на $[0, 1]$ функций, причем $\| A \| = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) e_k(x) \right| dx$.

Для любого $h \in (0, 1)$ положим $f_{t,h}(x) = (\operatorname{mes}([t-h, t+h] \cap [0, 1]))^{-1}$ для $x \in [t-h, t+h] \cap [0, 1]$ и $f_{t,h}(x) = 0$ для $x \in [0, 1] \setminus [t-h, t+h]$, и пусть $\varphi_{k,h}(t) = \int_0^1 \varphi_k(u) f_{t,h}(u) \, du$. Так как $\| f_{t,h} \| = 1$, то

$$\| I + A \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \int_0^1 \left| f(x) + \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} e_k(x) \varphi_k(u) f(u) \, du \right| dx \geqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 \Bigg| f_{t,h}(x) +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} e_k(x) \varphi_k(u) f_{t,h}(u) du \Bigg| dx = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \Bigg(\int\limits_{[t-h, t+h] \cap [0,1]} \left| f_{t,h}(x) + \sum_{k=1}^{n} e_k(x) \varphi_{k,h}(t) \right| dx +$$

$$+ \int\limits_{[0,1] \setminus [t-h, t+h]} \left| \sum_{k=1}^{n} e_k(x) \varphi_{k,h}(t) \right| dx \Bigg) \geqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left(1 + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} e_k(x) \varphi_{k,h}(t) \right| dx \right) -$$

$$- 2 \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int\limits_{[t-h, t+h] \cap [0,1]} \left| \sum_{k=1}^{n} e_k(x) \varphi_{k,h}(t) \right| dx.$$

Далее для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_0^1 |\varphi_{k,h}(t) - \varphi_k(t)|\,dt = \int_0^1 \Big|(\operatorname{mes}([t-h,\ t+h]\cap[0,\ 1]))^{-1} \int\limits_{\substack{|u|\leqslant h,\\ u+t\in[0,1]}} (\varphi_k(t+u) -$$

$$-\varphi_k(t))\,du\Big|\,dt \leqslant h^{-1} \int\limits_{|u|\leqslant h}\ \int\limits_{t+u\in[0,1]} |\varphi_k(t+u) - \varphi_k(t)|\,dtdu \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|u|\leqslant h} \int\limits_{t+u\in[0,1]} |\varphi_k(t+u) - \varphi_k(t)|\,dt \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_{k,h}(t) \right| dx - \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_k(t) \right| dx \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^n |e_k(x)|\,|\varphi_{k,h}(t) - \varphi_k(t)|\,dtdx \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

а значит $\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_{k,h}(t) \right| dx$ при $h \to 0$ сходится по мере к функции $\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_k(t) \right| dx$, и следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists h_1 > 0\ \forall h < h_1$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_{k,h}(t) \right| dx \geqslant \operatorname{vrai}\sup_t \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_k(t) \right| dx - \varepsilon. \qquad (2)$$

Так как $\|\varphi_{k,h}\| \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{vrai}\sup\limits_t |\varphi_k(t)| < \infty$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\forall \varepsilon > 0\ \exists h_2 > 0\ \forall h < h_2$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \left| \int\limits_{[t-h,t+h]\cap[0,1]} \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_{k,h}(t) \right| dx \right| \leqslant \varepsilon. \qquad (3)$$

Используя оценки (2) и (3), получаем $\forall \varepsilon > 0$

$$\|I + A\| \geqslant 1 + \operatorname{vrai}\sup \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n e_k(x)\,\varphi_k(t) \right| dt - \varepsilon - 2\varepsilon = 1 + \|A\| - 3\varepsilon,$$

и, учитывая правильное неравенство $\|I + A\| \leqslant 1 + \|A\|$, завершаем доказательство теоремы.

1. Даугавет И. К. Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C.— Успехи мат. наук. 1963, 18, № 5, с. 157—158.
2. Стечкин С. Б. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара.— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1971, 109 с. 27—34
3. Гаврилюк В. Т. Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.— В кн.: Теория приближения функций и ее приложения. Киев, 1974, с. 41—60.
4. Гаврилюк В. Т. Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. М. : Наука, 1977, с. 101—103.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию 14.011980 г.
после переработки 20.09.1980 г.