УДК 517.9:530.182

А. А. Березовский, Ю. В. Жерновой

Изгибные стационарные волны в стержнях при нелинейном законе упругости

Поперечные колебания физически нелинейных стержней описываются решениями квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [1]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\alpha^2 \lambda \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \tag{1}$$

где $w(x, t)$ — прогиб точки x оси стержня в момент времени t, а α и λ — некоторые постоянные, содержащие геометрические и упругие характеристики стержня.

Считая длину стержня неограниченной, исследуем стационарные волновые решения уравнения (1)

$$w(x, t) = w(kx - \omega t) \tag{2}$$

где k и ω — волновое число и частота. Переходя в уравнении (1) от независимых переменных x и t к фазовой переменной $\theta = kx - \omega t$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее форму искомых стационарных волн [2]

$$\alpha^2 k^4 w^{IV} + \omega^2 w^{II} = -\alpha^2 \lambda k^8 (w^{IV} w^{II^2} + 2 w^{III^2} w^{II}), \tag{3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по θ.

Рассмотрим периодические по θ решения уравнения (3) с периодом, который нормировкой может быть сведен к 2π. Это означает, что искомая функция $w(x, t) = w(\theta)$ должна удовлетворять условиям периодичности

$$w(-\pi) = w(\pi), \quad w'(-\pi) = w'(\pi), \quad w''(-\pi) = w''(\pi), \quad w'''(-\pi) = w'''(\pi). \tag{4}$$

Полагая $w''(\theta) = z(\theta)$, приходим к задаче отыскания периодического решения для уравнения второго порядка

$$\alpha^2 k^4 z'' + \omega^2 z = -\alpha^2 \lambda k^8 (z'' z^2 + 2 z'^2 z), \quad -\pi < \theta < \pi, \tag{3'}$$

$$z(-\pi) = z(\pi), \quad z'(-\pi) = z'(\pi). \tag{4'}$$

Отметим, что для существования решения задачи (3), (4) должны дополнительно выполняться условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} z(\theta)\, d\theta = 0, \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\theta_0} z(\psi)\, d\psi \right] d\theta_0 = 0, \quad w'(-\pi) = w'(\pi) = 0, \tag{6}$$

вытекающие из первых двух условий (4) и двукратного интегрирования по θ равенства $w''(\theta) = z(\theta)$.

Полагая

$$u(z) = \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2, \tag{7}$$

приходим к уравнению первого порядка

$$\alpha^2 k^4 (1+\lambda k^4 z^2)\frac{du}{dz} + 4\alpha^2 \lambda k^8 z u + 2\omega^2 z = 0, \tag{8}$$

решение которого записывается в виде

$$u(z) = -\frac{\omega^2}{2\alpha^2\lambda k^8}\left(1 - \frac{1}{(1+\lambda k^4 z^2)^2}\right) + \frac{A}{(1+\lambda k^4 z^2)^2}, \tag{9}$$

где A — произвольная постоянная интегрирования. Подставляя полученное решение (9) в (7), разделяя переменные и интегрируя, приходим к квадратуре, определяющей зависимость фазовой переменной θ от z

$$\theta(z) = \int \frac{(1+\lambda k^4 z^2)\,dz}{\pm\sqrt{A - \dfrac{\omega^2 z^2}{2\alpha^2 k^4}(2+\lambda k^4 z^2)}}. \tag{10}$$

Знак перед квадратным корнем необходимо выбирать в соответствии с возрастанием или убыванием $z(\theta)$ при циклическом изменении. Если $P(z) = A - \dfrac{\omega^2 z^2}{2\alpha^2 k^4}(2+\lambda k^4 z^2) \geqslant 0$, то существуют ограниченные периодические решения задачи (3′), (4′), осциллирующие между двумя вещественными корнями z_1 и z_2 полинома $P(z)$ [2, 3]

$$-z_1 = z_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2\lambda k^8 A} - \omega}{\lambda k^4 \omega}}. \tag{11}$$

Из (10) вытекает дисперсионное соотношение, устанавливающее связь между амплитудным параметром A и k, ω, определяющими число осцилляций на интервале $-\pi < \theta < \pi$ по координате и времени:

$$2\pi = \oint \frac{(1+\lambda k^4 z^2)\,dz}{\pm\sqrt{P(z)}}, \tag{12}$$

где $\oint$ — интеграл по полной осцилляции переменной z при ее циклическом изменении [3].

Отметим, что в линейном случае, когда $\lambda = 0$, из (10) находим $z = z_2 \cos\dfrac{\omega\theta}{\alpha k^2}$, $z_2 = \alpha k^2\sqrt{A}$. При этом существует периодическое решение уравнения (3′) $z = a\cos\theta$, $A = a^2$, если волновое число k и частота ω связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2 - \alpha^2 k^4 = 0. \tag{13}$$

Возвращаясь к нелинейной задаче, отметим, что условия (5), (6) приводят к необходимости рассмотрения четных решений $z(-\theta) = z(\theta)$ и поэтому $z = z(\theta)$ достаточно определить на полупериоде $0 < \theta < \pi$. Предположим, что $z(0) = z_2$, тогда, очевидно, $z(-\pi) = z(\pi) = -z_2$. Обозначим θ_1 то значение θ, при котором $z(\theta) = 0$. Теперь (10) перепишем в виде

$$\theta(z) = \frac{\alpha}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_z^{z_2} \frac{(1+\lambda k^4 x^2)\,dx}{\sqrt{(z_2^2 - x^2)(x^2 + z_2^2 + 2/\lambda k^4)}}, \quad 0 < z < z_2, \quad \frac{dz}{d\theta} < 0,$$

$$\theta(z) = \theta_1 + \frac{\alpha}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int^{0} \frac{(1+\lambda k^4 x^2)\,dx}{\sqrt{(z_2^2 - x^2)(x^2 - z_2^2 + 2/\lambda k^4)}}, \quad -z_2 < z < 0, \quad \frac{dz}{d\theta} < 0. \tag{14}$$

Полагая в первой из этих формул $z=0$, а во второй $z=-z_2$, получаем

$$\theta_1=\frac{\alpha}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int\limits_0^{z_2}\frac{(1+\lambda k^4x^2)\,dx}{\sqrt{(z_2^2-x^2)(x^2+z_2^2+2/\lambda k^4)}}, \tag{15}$$

$$\pi=\theta_1+\frac{\alpha}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int\limits_{-z_2}^{0}\frac{(1+\lambda k^4x^2)\,dx}{\sqrt{(z_2^2-x^2)(x^2+z_2^2+2/\lambda k^4)}}=$$

$$=\theta_1+\frac{\alpha}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int\limits_0^{z_2}\frac{(1+\lambda k^4x^2)\,dx}{\sqrt{(z_2^2-x^2)(x^2+z_2^2+2/\lambda k^4)}}, \tag{16}$$

откуда следует, что $\theta_1=\frac{\pi}{2}$. Исключая θ_1 из (15), приходим к дисперсионному соотношению, устанавливающему связь между амплитудой z_2, волновым числом k и частотой ω:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\alpha}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int\limits_0^{z_2}\frac{(1+\lambda k^4x^2)\,dx}{\sqrt{(z_2^2-x^2)\left(x^2+z_2^2+\frac{2}{\lambda k^4}\right)}}. \tag{17}$$

Входящий в (17) интеграл сводится к двум табличным, которые можно выразить с помощью полных эллиптических интегралов $K(m)$, $E\left(\frac{\pi}{2},\ m\right)$ и эллиптических интегралов первого и второго рода $F(\varphi, m)$ и $E(\varphi, m)$ [4]:

$$\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\,[K(m)-F(\varphi, m)],$$

$$\int\limits_0^x\frac{x^2dx}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2-x^2)}}\sqrt{p^2+q^2}\left[E\left(\frac{\pi}{2},\ m\right)-E(\varphi, m)\right]-$$

$$-\frac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}}[K(m)-F(\varphi, m)],\quad \varphi=\arccos\frac{x}{q},\quad m=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},\ 0<x<q, \tag{18}$$

где

$$K(m)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}m^2+\frac{3^2}{2^2\cdot 4^2}m^4+\ldots\right),$$

$$E\left(\frac{\pi}{2};\ m\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}m^2-\frac{3}{2^2\cdot 4^2}m^4-\ldots\right); \tag{19}$$

$$F(\varphi, m)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}},\quad E(\varphi, m)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{20}$$

В данном случае $x=q=z_2$, поэтому $\varphi=0$ и, следовательно, $F(0, m)=$ $=E(0, m)=0$. Для модуля m после исключения параметров $p^2=z_2^2+$ $+2/\lambda k^4$ и $q^2=z_2^2$ получим выражение

$$m=\frac{z_2}{\sqrt{2(z_2^2+1/\lambda k^4)}}=\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2+2\alpha^2\lambda k^8 A}-\omega}{2\sqrt{\omega^2+2\alpha^2\lambda k^8 A}}}. \tag{21}$$

С учетом (18) дисперсионное соотношение (17) записывается в виде

$$\frac{\pi}{2}\omega=\alpha k^2\sqrt{1+\lambda k^4 z_2^2}\left[2E\left(\frac{\pi}{2}, m\right)-K(m)\right]. \tag{22}$$

Если амплитуда колебаний A мала, то согласно (21) $m^2\simeq\frac{1}{2}\lambda k^4 A$, и для дисперсионного соотношения (22) можно получить разложение

$$\omega=\alpha k^2\left(1+\frac{1}{8}\lambda k^4 A+\dots\right), \tag{23}$$

при $\lambda=0$ переходящее в соотношение (13).

Воспользовавшись формулами (18), перепишем квадратуры (14) в виде

$$\theta(z)=\frac{\alpha k^2}{\omega}\sqrt{1+\lambda k^4 z_2^2}\,[2E(\varphi(z), m)-F(\varphi(z), m)],\ 0<z<z_2,$$

$$\frac{dz}{d\theta}<0,\quad \varphi=\arccos\frac{z}{z_2};$$

$$\theta(z)=\frac{\alpha k^2}{\omega}\sqrt{1+\lambda k^4 z_2^2}\left[F(\varphi(z), m)-2E(\varphi(z), m)-2K(m)+4E\left(\frac{\pi}{2}, m\right)\right],$$

$$-z_2<z<0,\quad \frac{dz}{d\theta}<0,\quad \varphi=\arccos\left(-\frac{z}{z_2}\right). \tag{24}$$

Квадратуры (24) определяют в неявном виде решение задачи (3′), (4′) на полупериоде $0<\theta<\pi$, если волновое число k, частота ω и амплитуда z_2 удовлетворяют дисперсионному соотношению (22). Поскольку нас интересуют четные решения $z(-\theta)=z(\theta)$, то для функции $\theta=f(\varphi)$, $-\pi<$ $<\theta<\pi$ имеем

$$f(\varphi)=\begin{cases}\gamma[2E(\varphi, m)-F(\varphi, m)]-C, & -z_2<z<0,\ z'>0,\\ \gamma[F(\varphi, m)-2E(\varphi, m)], & 0<z<z_2,\ z'>0,\\ \gamma[2E(\varphi, m)-F(\varphi, m)], & 0<z<z_2,\ z'<0,\\ \gamma[F(\varphi, m)-2E(\varphi, m)]+C, & -z_2<z<0,\ z'<0,\end{cases} \tag{25}$$

где

$$\gamma=\frac{\alpha k^2}{\omega}\sqrt{1+\lambda k^4 z_2^2},\ C=2\gamma\left[2E\left(\frac{\pi}{2}, m\right)-K(m)\right]=\pi,$$

$$\varphi=\varphi(z)=\begin{cases}\arccos\left(-\frac{z}{z_2}\right), & -z_2<z<0,\\ \arccos\frac{z}{z_2}, & 0<z<z_2.\end{cases} \tag{26}$$

решение задачи (3′), (4′) на всем интервале $-\pi<\theta<\pi$

$$z(\theta)=\begin{cases}-z_2\cos f^{-1}(\theta), & -\pi<\theta<-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi,\\ z_2\cos f^{-1}(\theta), & -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.\end{cases} \tag{27}$$

Обращая функции $f(\varphi)$ и $\varphi(z)$, получаем искомое четное. При $\lambda = 0$

$$f^{-1}(\theta) = \frac{\omega}{\alpha k^2}\theta = \theta$$

и (27) трансформируется в решение линейной задачи. Если амплитуда мала, то для $z(\theta)$, амплитудного параметра A и дисперсионного соотношения можно получить разложения Стокса

$$z(\theta) = a\cos\theta - \frac{3}{32}\lambda k^4 a^3 \cos 3\theta - \ldots, \quad \omega^2 = \alpha^2 k^4\left(1 + \frac{1}{4}\lambda k^4 a^2 + \ldots\right),$$

$$A = a^2 + \frac{9}{16}\lambda k^4 a^4 + \ldots \tag{28}$$

либо прямой подстановкой в уравнения (3′) и (9), либо разложением точных выражений (10), (12).

Покажем, что решение (27) удовлетворяет условиям (5), (6). Действительно, для всех $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ в силу очевидных равенств $f^{-1}(-\pi) = f^{-1}(0) = f^{-1}(\pi) = 0$, $f^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\int_{-\pi}^{\theta_0} z(\theta)\,d\theta = -z_2\int_{-\pi}^{\theta_0}\cos f^{-1}(\theta)\,d\theta = -z_2\int_{f^{-1}(-\pi)}^{f^{-1}(\theta_0)}\cos\psi f'(\psi)\,d\psi =$$

$$= -z_2\gamma\int_0^{f^{-1}(\theta_0)}\cos\psi\left[2\sqrt{1 - m^2\sin^2\psi} - \frac{1}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\psi}}\right]d\psi =$$

$$= -z_2\gamma\sin f^{-1}(\theta_0)\sqrt{1 - m^2\sin^2 f^{-1}(\theta_0)}, \qquad -\pi < \theta_0 < -\frac{\pi}{2} \tag{29}$$

Выполнив аналогичные вычисления для других θ_0, окончательно находим

$$\int_{-\pi}^{\theta_0} z(\theta)\,d\theta = z_2\gamma\cdot\begin{cases} -\sin f^{-1}(\theta_0)\sqrt{1 - m^2\sin^2 f^{-1}(\theta_0)}, & -\pi < \theta_0 < 0, \\ \sin f^{-1}(\theta_0)\sqrt{1 - m^2\sin^2 f^{-1}(\theta_0)}, & 0 < \theta_0 < \pi, \end{cases} \tag{30}$$

откуда при $\theta_0 = \pi$ вытекает условие (5). Далее, в силу (30) для $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ находим

$$\int_{-\pi}^{\theta}\left[\int_{-\pi}^{\theta_0} z(\varphi)\,d\varphi\right]d\theta_0 = z_2\gamma^2\left[\left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\cos f^{-1}(\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}m^2\cos 3f^{-1}(\theta) + \frac{4}{3}m^2 - 1\right] \tag{31}$$

и для $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ —

$$\int_{-\pi}^{\theta}\left[\int_{-\pi}^{\theta_0} z(\psi)\,d\psi\right]d\theta_0 = z_2\gamma^2\left[\left(\frac{3}{2}m^2 - 1\right)\cos f^{-1}(\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6}m^2\cos 3f^{-1}(\theta) + \frac{4}{3}m^2 - 1\right]. \tag{32}$$

Полагая в (31) $\theta = \pi$, приходим к первому условию (6). Второе из условий (6) выполняется при соответствующем выборе постоянных интегрирования.

Решение исходной задачи (3), (4) определяется квадратурой

$$w(\theta) = w(-\pi) + \int_{-\pi}^{\theta}\left[\int_{-\pi}^{\theta_0} z(\psi)\,d\psi\right]d\theta_0 =$$

$$= z_2\gamma^2 \cdot \begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\cos f^{-1}(\theta) + \frac{1}{6}m^2\cos 3f^{-1}(\theta), \\ \qquad -\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \\ \left(\frac{3}{2}m^2 - 1\right)\cos f^{-1}(\theta) - \frac{1}{6}m^2\cos 3f^{-1}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{33}$$

при $w(-\pi) = w(\pi) = z_2\gamma^2\left(1 - \frac{4}{3}m^2\right)$. Из (26) следует, что $0 < f^{-1}(\theta) < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, полученное решение (34) является периодической функцией θ с периодом 2π.

Можно показать, что при малой амплитуде из точного решения (33) следуют разложения Стокса типа (28). При $\lambda = 0$ (33) преобразуется в решение линейной задачи $w(\theta) = \sqrt{A}\cos\theta$, $A = a^2$, $\omega^2 - \alpha^2 k^4 = 0$.

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
2. Нелинейные волны / Под ред. Лейбовича С. и Сибасса А. М. : Мир, 1977. 319 с.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М. : Мир, 1977. 622 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Наука, 1971. 1108 с.

Ин-т математики
АН УССР

Поступила в редакцию
23.05.1980 г.