УДК 519.21

Н. С. Братийчук

Граничные задачи, связанные с выходом случайного блуждания из интервала

1. Введение. Рассмотрим случайное блуждание $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, описываемое стохастически непрерывным однородным процессом с независимыми приращениями и непрерывными справа траекториями. Пусть кумулянта процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$k(s) = \ln M e^{s(\xi(1)-\xi(0))} = \frac{b}{2} s^2 + as + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{sx} - 1 - s\frac{x}{1+x^2}\right) \Pi(dx) + \frac{cs}{\alpha - s}, \tag{1}$$

где $b \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $c > 0$. Другими словами, предполагается, что в представлении Леви — Хинчина для $k(s)$ мера $\Pi(\cdot)$ на положительной полуоси имеет плотность $\alpha \cdot c \cdot e^{-\alpha x}$. Кроме того, если процесс $\xi(t)$ имеет ограниченную вариацию, то будем считать, что $a_1 = a - \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2} \Pi(dx) > 0$.

В настоящей статье получено представление для резольвенты процесса, полученного из $\xi(t)$ обрывом в момент выхода из интервала, и изучаются граничные задачи, указанные в заглавии. Аналогичные вопросы рассматривались в [1] в предположении, что процесс $\xi(t)$ имеет ограниченную вариацию.

Из принципа аргумента легко следует, что уравнение

$$k(s)-\lambda=0, \quad \lambda>0, \tag{2}$$

имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ только два корня. Учитывая вид функции $k(s)$, заключаем, что один из них лежит на отрезке $[0, \alpha]$, а другой — на полупрямой $[\alpha, \infty)$. Обозначим их соответственно $\rho_+(\lambda)$ и $\rho(\lambda)$.

Если $b>0$, то переписывая результаты из [2], для нашего случая получим, что для функции

$$R_\lambda(x)=\frac{\rho(\lambda)\rho_+(\lambda)}{\alpha}\int_0^x e^{\rho_+(\lambda)(x-y)} d\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{-\inf_{0\leqslant u\leqslant t}\xi(u)<y/\xi(0)=0\}\, dt\right) \tag{3}$$

имеет место соотношение

$$\int_0^\infty e^{-sx} R_\lambda(x)\, dx=\frac{s-\rho(\lambda)}{(k(s)-\lambda)(s-\alpha)}, \quad \operatorname{Re} s>\rho_+(\lambda). \tag{4}$$

Если положить $B_\lambda(x)=R_\lambda(x)+(\rho(\lambda)-\alpha)\int_0^x e^{\rho(\lambda)y} R_\lambda(x-y)\, dy$, то легко проверить, что

$$\int_0^\infty e^{-sx} B_\lambda(x)\, dx=\frac{1}{k(s)-\lambda}, \quad \operatorname{Re} s>\rho(\lambda). \tag{5}$$

Предельным переходом при $b\to 0$ устанавливаем справедливость формул (3)—(5) и при $b=0$.

2. Формулировка результатов. Пусть $\xi(0)=0$, $0<x<T$, ζ — момент выхода процесса $\xi(t)$ из интервала $(0, T)$, а M_x обозначает условное математическое ожидание при условии $\xi(0)=x$. Резольвента процесса, который получается из $\xi(t)$ обрывом в момент времени ζ, определяется формулой $\mathbf{R}_\lambda^T f(x)=M_x\int_0^\zeta e^{-\lambda t} f(\xi(t))\, dt$, где f — ограниченная измеримая функция.

Теорема 1. *Имеет место представление*

$$\mathbf{R}_\lambda^T f(x)=c_0 B_\lambda(x)+c_1\int_0^x e^{\alpha y} B_\lambda(x-y)\, dy-\int_0^x f(y) B_\lambda(x-y)\, dy, \tag{6}$$

где c_0, c_1 — *единственное решение системы*

$$\begin{gathered} c_0 B_\lambda(T)+c_1\int_0^T e^{\alpha y} B_\lambda(T-y)\, dy=\int_0^T f(y) B_\lambda(T-y)\, dy, \\ c_0\int_0^T e^{-\alpha y} B_\lambda(y)\, dy+c_1\left(\int_0^T\int_0^x e^{-\alpha y} B_\lambda(y)\, dy dx+\frac{1}{c\alpha}\right)= \\ =\int_0^T e^{-\alpha x}\int_0^x f(y) B_\lambda(x-y)\, dy dx. \end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 2. *При* $\lambda > 0$, $0 < x < T$

$$M_x e^{-\lambda\zeta} = 1 - \lambda \left(c_0^{(1)} B_\lambda (x) + c_1^{(1)} \int_0^x e^{\alpha y} B_\lambda (x - y)\, dy - \int_0^x B_\lambda (y)\, dy \right),$$

где $c_0^{(1)}$, $c_1^{(1)}$ — *решение системы* (7) *с* $f(y) \equiv 1$.

Теорема 3. *При* $\lambda > 0$, $0 < x < T$ *и* $z < 0$

$$M_x (e^{-\lambda\zeta}, \xi(\zeta) \leqslant z) = c_0^{(2)} B_\lambda (x) + c_1^{(2)} \int_0^x e^{\alpha y} B_\lambda (x - y)\, dy +$$

$$+ \int_0^x B_\lambda (x - y)\, \Pi(-\infty, z - y)\, dy,$$

где $c_0^{(2)}$, $c_1^{(2)}$ — *решение системы* (7) *с* $f(y) = \Pi(-\infty, z - y)$.

Теорема 4. *При* $\lambda > 0$, $0 < x < T$ *и* $u \geqslant 0$

$$M_x (e^{-\lambda\zeta}, \xi(\zeta) \geqslant T + u) = c_0^{(3)} B_\lambda (x) + c_1^{(3)} \int_0^x e^{\alpha y} B_\lambda (x - y)\, dy -$$

$$- c e^{-\alpha(T+u)} \int_0^x e^{\alpha y} B_\lambda (x - y)\, dy$$

и если $u > 0$, *то* $c_0^{(3)}$, $c_1^{(3)}$ — *решение системы* (7) *с* $f(y) = ce^{-\alpha(T+u-y)}$, *а если* $u = 0$, *то* $c_0^{(3)}$, $c_1^{(3)}$ — *решение системы* (7) *с заменой* $\int_0^T f(y) B_\lambda (T - y)\, dy$ *на* $\int_0^T f(y) B_\lambda (T - y)\, dy + 1$ *и* с $f(y) = ce^{-\alpha(T-y)}$.

3. Доказательство. Установим определенность системы (7). Для этого достаточно показать, что если $\tilde{c}_0$, $\tilde{c}_1$ — решение однородной системы, соответствующей (7), то $\tilde{c}_0 = 0$, $\tilde{c}_1 = 0$. Пусть

$$Ku(x) \equiv \frac{b}{2} u''(x) + au'(x) + \int_{-\infty}^0 \left(u(x + y) - u(x) - u'(x) \frac{y}{1 + y^2} \right) \Pi(dy).$$

Положим

$$u_T(x) = \tilde{c}_0 B_\lambda (x) + \tilde{c}_1 \int_0^x e^{\alpha y} B_\lambda (x - y)\, dy \tag{8}$$

и покажем, что $u_T(x)$ — решение задачи

$$\begin{gathered} Ku_T(x) + c\alpha \int_0^\infty (u_T(x + y) - u_T(x)) e^{-\alpha y} dy = \lambda u_T(x), \qquad 0 < x < T, \\ u_T(x) = 0, \qquad x \bar{\in} (0, T). \end{gathered} \tag{9}$$

С этой целью перепишем уравнение (9) с учетом условия $u_T(x) = 0$, $x \geqslant T$, в виде

$$Ku_T(x) + c\alpha e^{\alpha x} \int_x^T u_T(y) e^{-\alpha y} dy = (\lambda + c)\, u_T(x), \quad 0 < x < T. \tag{10}$$

Если в этом уравнении заменить $u_T(x)$ на $u(x)$, то, используя преобразование Лапласа, легко убедиться, что функция

$$u(x)=\begin{cases}\tilde{c}_0 B_\lambda(x)+\tilde{c}_1\int\limits_0^x e^{\alpha y}B_\lambda(x-y)\,dy, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (10) на полуоси $x>0$. Ясно, что функция $u_T(x)=u(x)\ \chi_{[0,T)}(x)$ — решение задачи (9). Покажем, что $u_T(x)\equiv 0$, $0<x<T$, после чего из соотношения (8) несложно вывести, что $\tilde{c}_0=0$, $\tilde{c}_1=0$.

Если процесс $\xi(t)$ имеет неограниченную вариацию, то $B_\lambda(+0)=0$ и $u_T(x)$ непрерывна при всех x. Пусть $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant T} u_T(x)=u_T(x_0)$, $0<x_0<T$, тогда

$$\lambda u_T(x)=\frac{b}{2}\,u_T''(x_0)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(u_T(x_0+y)-u_T(x_0))\,\Pi(dy)\leqslant 0$$

и, следовательно, $u_T(x_0)=0$. Аналогично убеждаемся, что $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant T} u_T(x)=0$, а значит $u_T(x)\equiv 0$, $0<x<T$.

Если процесс $\xi(t)$ имеет ограниченную вариацию, то из соотношений (3)—(5) и тауберовой теоремы следует, что $B_\lambda(+0)=\dfrac{1}{a_1}$. Следовательно, $u_T(x)$ может быть разрывной в точке $x=0$ и изложенное выше доказательство тождества $u_T(x)\equiv 0$, $0<x<T$, перенесется на этот случай, если покажем, что $u_T(x)$ не может иметь в точке $x=+0$ экстремального значения, отличного от нуля. Действительно, пусть $u_T(+0)>u_T(x)$, $0<x<T$. Тогда найдется такое $0<x_0<T$, что $u_T(x_0)>0$ $u_T'(x_0)\leqslant 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(u_T(x_0+y)-u_T(x_0))\,\Pi(dy)\leqslant 0$, а значит

$$\lambda u_T(x_0)=a_1u_T'(x_0)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(u_T(x_0+y)-u_T(x_0))\,\Pi(dy)\leqslant 0.$$

Аналогичен результат и если $u_T(+0)<u_T(x)$, $0<x<T$.

Перейдем к доказательству представления (6). Предположим сначала, что $\xi(t)$ — сложный пуассоновский процесс с кумулянтой

$$k(s)=as+\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{sx}-1)\,dF(x),\quad a>0\quad \beta>0, \tag{11}$$

и постоянная a, вообще говоря, не та, что в (1).

Положим $g^T(x)=\mathbf{R}_\lambda^T f(x)$, $\tau=\inf\{t:\xi(t)\neq\xi(t-0)\}$, $B=\left\{\omega:\tau(\omega)<\dfrac{T-x}{a}\right\}$, $\chi(B)=\chi_B(\omega)$ — индикатор события B. Случайная величина τ имеет показательное распределение с параметром β, не зависит от скачков процесса $\xi(t)$, случайная величина $\chi(B)\,e^{-\lambda\tau}$ измерима относительно σ-алгебры, порожденной событиями до момента τ. Поэтому

$$g^T(x)=M_x\chi(B)\int\limits_0^{\zeta}e^{-\lambda t}f(\xi(t))\,dt+M_x\chi(\overline{B})\int\limits_0^{\zeta}e^{-\lambda t}f(\xi(t))\,dt=$$

$$= M_x \chi(B) \int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(\xi(t))\, dt + M_x \chi(B) e^{-\lambda \tau} g^T(\xi(\tau)) + \int_0^{\frac{T-x}{a}} e^{-\lambda t} f(x+at)\, dt\, e^{-\beta \frac{T-x}{a}}. \tag{12}$$

После несложных преобразований из (12), учитывая, что $g^T(x) = 0$, $x \overline{\in} (0, T)$, получаем

$$g^T(x) = \frac{1}{a} e^{\frac{\beta+\lambda}{a} x} \left(\int_x^T e^{-\frac{\beta+\lambda}{a} y} f(y)\, dy + \beta \int_x^T e^{-\frac{\beta+\lambda}{a} y} \int_{-y}^{T-y} g^T(y+z)\, dF(z)\, dy \right), \tag{13}$$

и $dF(x) = \frac{c\alpha}{\beta} e^{-\alpha x} dx$ при $x > 0$. Так как при $x \in [0, T]$

$$\left| e^{\frac{\beta+\lambda}{a} x} \frac{\beta}{a} \int_x^T e^{-\frac{\beta+\lambda}{a} y} \int_{-y}^{T-y} g^T(y+z)\, dF(z)\, dy \right| \leqslant \frac{\beta}{\beta+\lambda} \sup_{0 \leqslant x \leqslant T} |g^T(x)|,$$

то из теоремы о неподвижной точке следует, что уравнение (13) имеет единственное решение в классе функций, ограниченных на $[0, T]$.

Заменим в (13) $g^T(x)$ на $g(x)$ и найдем решение полученного уравнения на полуоси $x > 0$ в классе непрерывных справа функций, растущих не быстрее $\exp\{\rho(\lambda) x\}$ при $x \to \infty$ и таких, что $g(x) = 0$, $x \leqslant 0$. Очевидно, условие $g^T(T) = 0$ необходимо для разрешимости уравнения (13) на полуоси $x > 0$. Применяя к (13) преобразование Лапласа и учитывая вид $F(x)$ при $x > 0$, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} g(x)\, dx = \frac{c_0 + \frac{c_1}{\alpha - s} - \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx}{k(s) - \lambda}, \tag{14}$$

где

$$c_0 = a g(+0), \tag{15}$$

$$c_1 = -c\alpha \int_0^T e^{-\alpha y} g(y)\, dy. \tag{16}$$

Учитывая равенство (5), из (14) получаем

$$g(x) = c_0 B_\lambda(x) + c_1 \int_0^x e^{\alpha y} B_\lambda(x-y)\, dy - \int_0^x f(y) B_\lambda(x-y)\, dy.$$

Система уравнений для C_0, C_1 следует из (16) и условия $g(T) = 0$. Так как $B_\lambda(+0) = \frac{1}{a}$, то так найденное значение c_0 не противоречит (15). Если положить $g^T(x) = g(x) \chi^{(x)}_{[0,T)}$, то ясно, что $g^T(x)$ — решение уравнения (13). Следовательно, представление (6) для сложного пуассоновского процесса доказано.

Пусть теперь процесс $\xi(t)$ не является сложным пуассоновским и имеет кумулянту $k(s)$ вида (1). Возьмем последовательность сложных пуассоновских процессов $\xi_n(t)$, $n \geqslant 0$, с кумулянтами $k_n(s)$ вида (11) и таких, что $k_n(s) \to k(s)$ при $n \to \infty$. Ясно, что $\xi_n(t)$ можем выбрать так, что для всех n, $\beta_n \int_0^{\infty} (e^{sx} - 1)\, dF_n(x) = \frac{cs}{\alpha - s}$. Индекс n здесь и дальше означает, что соответствующая характеристика относится к процессу $\xi_n(t)$. Так как $k_n(s) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k(s)$ равномерно в каждой ограниченной области полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$, то $\rho_+^{(n)}(\lambda) \to \rho_+(\lambda)$, $\rho^{(n)}(\lambda) \to \rho(\lambda)$ при $n\to\infty$. Далее,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{-\inf_{0\leqslant u\leqslant t} \xi_n(u) < y/\xi_n(0)=0\}\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-\lambda t} P \times$$
$$\times \{-\inf_{0\leqslant u\leqslant t} \xi(u) < y/\xi(0)=0\}\, dt, \qquad y>0,$$

(см., например, [3, с. 445]) и, следовательно, $B_\lambda^{(n)}(x) \to B_\lambda(x)$ при $n\to\infty$, $x>0$. Поэтому $c_0^{(n)} \to c_0$, $c_1^{(n)} \to c_1$ при $n\to\infty$. Известно [4], что ${}_n\mathbf{R}_\lambda^T f(x) \to \mathbf{R}_\lambda^T f(x)$ при $n\to\infty$, $x>0$. Совершая теперь в представлении для ${}_n\mathbf{R}_\lambda^T f(x)$ предельный переход при $n\to\infty$, завершаем доказательство теоремы 1.

При доказательстве других теорем исходным пунктом является формула

$$M_x(e^{-\lambda\zeta}, f(\xi(\zeta))) - f(x) = \mathbf{R}_\lambda^T A f(x) - \lambda \mathbf{R}_\lambda^T f(x). \tag{17}$$

где $Af(x) = \frac{b}{2} f''(x) + af'(x) + \int_{-\infty}^{0} \left(f(x+y) - f(x) - f'(x)\frac{y}{1+y^2}\right)\Pi(dy) + c\alpha \int_0^\infty (f(x+y) - f(x))\, e^{-\alpha x} dx$. Так при доказательстве теоремы 2 достаточно положить в (17) $f(x)\equiv 1$ и воспользоваться представлением (6).

Для доказательства теоремы 3 и теоремы 4 в случае $u>0$ достаточно в качестве f взять дважды непрерывно дифференцируемую функцию и такую, что $f(x) = \begin{cases} 1, & x\leqslant z, \\ 0, & x\geqslant z+\varepsilon, \end{cases}$ $\varepsilon>0$, в случае теоремы 3, и $f(x) = \begin{cases} 0, & x\leqslant T+u-\varepsilon, \\ 1, & x\geqslant T+u, \end{cases}$ в случае теоремы 4, затем подставить их в формулу (17) и перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Если в теореме 4 $u=0$, то положим в (17)

$$f(x) = f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{n^2\left(T-y-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2}} dy.$$

Очевидно, что $f_n(x) \to \chi_{[T,\infty]}(x)$ при $n\to\infty$. В [4] рассмотрен случай, когда процесс $\xi(t)$ имеет только отрицательные скачки. Просматривая обоснование предельного перехода при $n\to\infty$ легко убедиться, что оно с очевидными изменениями переносится на наш случай. Совершая указанный предельный переход в формуле (17), завершаем доказательство теоремы 4.

1. Братийчук Н. С. Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями.— В кн.: Асимптотические задачи для случайных процессов. Препринт 77. 24.К. Ин-т математики АН УССР, 1977 с. 3—27.
2. Братийчук Н. С. О резольвенте обрывающегося процесса с независимыми приращениями.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 1, с. 96—100.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М. : Наука, 1973. **2**, 639 с.
4. Супрун В. Н. Задача о разорении и резольвента обрывающегося процесса с независимыми приращениями.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 1, с. 53—60.

Луцкий
педагогический институт

Поступила в редакцию 17.12.1979 г.,
после переработки — 13.05. 1980 г.