УДК 517.535.4

М. А. Гирнык

О дефектах производных целой функции

Будем без пояснений использовать стандартные обозначения и основные факты теории распределения значений (см., например, [1]). Обозначим через M класс целых функций, удовлетворяющих условию

$$\ln T(2r, f^{(k)}) = o(T(r, f^{(k)})), \quad r \to \infty, \ k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

В частности, классу M принадлежат все целые функции конечного порядка. Нетрудно показать (ср. [2, с. 48]), что для функции из класса M справедливы неравенства

$$\delta(0, f^{(k+1)}) \geqslant \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f^{(k)}), \qquad k = 0, 1, \dots. \tag{2}$$

Легко видеть, что из (2) вытекает неравенство

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{a\neq 0,\infty}\delta(a,f^{(k)})\leqslant 1. \qquad (3)$$

В заметке доказывается, что неравенство (3) — некоторое обобщение соотношения дефектов, в определенном смысле неулучшаемо. Из результата работы следует также отрицательный ответ на вопросы Фукса [3, задача 1.1], поставленные в связи с неравенством (2): «Верно ли, что последовательное дифференцирование необходимо приводит к производной, для которой нуль — единственное дефектное значение? Верно ли это хотя бы для функций конечного порядка?»

Теорема. *Пусть* $\{a_{k,n}\}$, $k=0,1,2,\ldots$, $1\leqslant n\leqslant N_k\leqslant\infty$ — *не более чем счетные множества различных комплексных чисел, причем* $0\notin\{a_{k,n}\}$, *если* $k\geqslant 1$. *Пусть каждой точке* $a_{k,n}$ *поставлено в соответствие число* $\delta_{k,n}$, $0<\delta_{k,n}\leqslant 1$, *и выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N_k}\delta_{k,n}\leqslant 1.$$

Тогда существует целая функция $f\in M$ *бесконечного порядка, такая, что* $\delta(a_{k,n},f^{(k)})=\delta_{k,n}$, f *не имеет конечных дефектных значений, отличных от* $a_{0,n}$, *и* $f^{(k)}$ *не имеет дефектных значений, не равных* 0 *или* ∞, *отличных от* $a_{k,n}$.

Доказательство. Мы в значительной степени будем следовать рассуждениям Хеймана и Фукса при построении целой функции бесконечного порядка с заданными дефектами [4, с. 125—139]. Положим $\delta_{0,0}=1-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N_k}\delta_{k,n}$.

Установим взаимно-однозначное соответствие между элементами матрицы $(a_{k,n})$ и множеством натуральных чисел, пусть $a_{k,n}$ соответствует при этом $\varkappa_{k,n}\in\mathbf{N}$. Тогда, согласно [4, лемма 4.4], множество $\mathbf{Z}_+$ можно разбить на попарно не пересекающиеся множества $S_{k,n}$ с плотностью $\delta_{k,n}$, такие, что если $\nu\in S_{k,n}$, $n>0$, то $\nu>(1+|a_{k,n}|)\,2^{\varkappa_{k,n}}$. Обозначим через A_ν полуполосу $A_\nu=\{z:\operatorname{Re}z>0,\ |\operatorname{Im}z-2\pi\nu|\leqslant\pi\}$. Пусть $E_\nu(z)=E_0(z-2\pi\nu i)$, где $E_0(z)$ — целая функция из [4, лемма 4.1], $\varphi_\nu(z)=\begin{cases}e^z, & |\nu|\in S_{0,0},\\ a_{k,n}\dfrac{z^k}{k!}, & |\nu|\in S_{k,n},\ n>0.\end{cases}$

Искомая функция $f(z)$ определяется равенством

$$f(z)=\exp(-e^z-z)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\varphi_\nu(z)\,E_\nu(z). \qquad (4)$$

Убедимся, что функция $f(z)$ обладает нужными свойствами.

Лемма 1 (ср. [4, лемма 4.2]). *Имеет место соотношение* $f(z)=\varphi_m(z)+O(|z|^2e^{|z|}|\exp(-e^z-z)|)$ *при* $z=x+iy\to\infty$ *произвольным образом, где* m — *целое число, определяемое условием* $(2m-1)\pi<y\leqslant(2m+1)\pi$.

Доказательство. Покажем, что справедлива оценка

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi_\nu(z)|}{1+\nu^2}=O(e^{|z|}),\qquad z\to\infty. \qquad (5)$$

Действительно, учитывая лемму 4.4 из [4] и определение функций $\varphi_\nu(z)$ имеем $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi_\nu(z)|}{1+\nu^2}=\Big(\sum\limits_{|\nu|\in S_{0,0}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{N_k}\sum\limits_{|\nu|\in S_{k,n}}\Big)\frac{|\varphi_\nu(z)|}{1+\nu^2}\leqslant 2e^{|z|}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{1+\nu^2}+$ $+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{N_k}\sum\limits_{|\nu|\in S_{k,n}}\frac{|a_{k,n}|e^{|z|}}{1+\nu^2}\leqslant O(e^{|z|})+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{N_k}\sum\limits_{\nu>(1+|a_{k,n}|)2^{\varkappa_{k,n}}}\frac{2|a_{k,n}|e^{|z|}}{1+\nu^2}\leqslant$ $\leqslant O(e^{|z|})+e^{|z|}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{N_k}\frac{2}{2^{\varkappa_{k,n}}}=O(e^{|z|})$, $|z|\to\infty$. После получения оценки (5) доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 4.2 в [4] и мы его опускаем.

Лемма 2. *Для функции $f(z)$, заданной равенством* (4), *выполняются условия* $\delta(a_{k,n}, f^{(k)})\geqslant\delta_{k,n}$, $k=0, 1, \dots, 1\leqslant n\leqslant N_k$, $\delta(0, f(z)-e^z)\geqslant\delta_{0,0}$.

Доказательство. Пусть $(0<h<1/2)$

$$\psi_{k,n}^{(h)}(y)=\begin{cases}\cos(|y-2\pi\nu|+h),\\ \text{если } |y-2\pi\nu|<\pi/2-h,\ |\nu|\in S_{k,n},\\ 0\\ \text{в противном случае}\end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{Y\to\infty}Y^{-1}\int\limits_0^Y\psi_{k,n}^{(h)}(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\delta_{k,n}(1-\sin h). \qquad (6)$$

Пусть $z=x+iy$, где $|y-2\pi\nu|<\pi/2-h$, $|\nu|\in S_{k,n}$. Обозначим $C_h=$ $=\{\zeta:|\zeta-z|=h\}$. Оценим, используя лемму 1, $|f^{(k)}(z)-a_{k,n}|=|f^{(k)}(z)-$ $-\varphi_\nu^{(k)}(z)|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_h}\frac{f(\zeta)-\varphi_\nu(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta\right|\leqslant\frac{k!}{2\pi}\frac{2\pi h}{h^{k+1}}\max\{|f(\zeta)-\varphi_\nu(\zeta)|:\zeta\in C_h\}\leqslant$ $\leqslant\frac{Ak!}{h^k}(|z|+h)^2e^{|z|+h}\exp(-e^{x-h}\psi_{k,n}^{(h)}(y))$, где A — положительная постоянная, не зависящая от z и h. Поэтому при больших z выполняется неравенство $\ln^+\frac{1}{|f^{(k)}(z)-a_{k,n}|}\geqslant e^{x-h}\psi_{k,n}^{(h)}(y)-2\ln|2z|-2|z|-\left|\ln\frac{h^k}{Ak!}\right|$.

Применяя лемму 4.3 из [4] и равенство (6), найдем, что при $r\to\infty$

$$m\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-a_{k,n}}\right)\geqslant\delta_{k,n}(1+o(1))\frac{1-\sin h}{e^h}\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3r}}. \qquad (7)$$

Из лемм 1 и 4.3 из [4], а также оценки (5) следует (ср. [4, с. 132—133]), что $T(r, f)\leqslant(2\pi^3r)^{-1/2}e^r(1+o(1))$, $r\to\infty$, и, таким образом, $f\in M$. Поскольку, как следует из леммы о логарифмической производной в форме (1.13) на с. 123 в [1], для функции $f\in M$ справедливо неравенство

$$T(r, f^{(k)})\leqslant(1+o(1))\,T(r, f^{(k-1)}), \qquad r\to\infty,\ k=1, 2, \dots. \qquad (8)$$

то, устремляя h к нулю, получаем утверждение леммы (случай $\delta_{0,0}$ рассматривается аналогично). Отметим также следствие из неравенства (7) $r=$ $=o(T(r, f^{(k)}))$, $r\to\infty$, $k=0, 1, 2, \dots$. Чтобы завершить доказательство теоремы, установим, что для построенной функции $f\in M$ выполняется неравенство

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{a\neq 0,\infty}\delta(a,f^{(k)})+\delta(0,f-e^{z})\leqslant 1. \qquad (9)$$

Тогда из леммы 2 и соотношения (9) следует утверждение теоремы.

Пусть $\{a_{k,n}\}$, $k=0,1,\dots,s$, $1\leqslant n\leqslant q_s$ — множества различных комплексных чисел, причем при $k\geqslant 1$ среди них нет нуля. Применяя неравенство (2.5) из [1, с. 128], а также лемму о логарифмической производной, получаем

$$\sum_{n=1}^{q_0}m(r,0,f-a_{0,n})+\sum_{n=1}^{q_1}m(r,0,f'-a_{1,n})+\dots+\sum_{n=1}^{q_s}m(r,0,f^{(s)}-a_{s,n})+$$

$$+m(r,0,f-e^{z})\leqslant m(r,0,f^{(s+1)})+m(r,0,f^{(s+1)}-e^{z})+o(r),\ \ r\to\infty. \qquad (10)$$

Рассмотрим функцию $h(z)=e^{-z}f^{(s+1)}(z)+1$. Используя вторую основную теорему и учитывая известные свойства неванлинновских характеристик, имеем

$$m(r,1,h)+m(r,2,h)=m(r,0,f^{(s+1)})+m(r,0,f^{(s+1)}-e^{z})+o(r)\leqslant$$

$$\leqslant T(r,h)+o(r)=T(r,f^{(s+1)})+o(r),\quad r\to\infty. \qquad (11)$$

Из неравенств (8), (10), (11) очевидным образом следует (9). Теорема доказана.

Замечание. Несущественно модифицируя доказательство Н. У. Аракеляна [1, с. 172 — 195], можно построить целую функцию $g(z)$ конечного порядка $\rho>1/2$, для которой $\delta(a_{k,n},g^{(k)})>0$ для всех $k\in\mathbf{Z}_{+}$, $n\in\mathbf{N}$.

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1970. 592 с.
2. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М. : Физматгиз, 1960. 319 с.
3. Miller S. S. Problems in complex function theory. Complex Anal. Proc. S. U. N. Y. Brockport Conf. New-York, Basel, 1978, p. 167—177.
4. Хейман У. К. Мероморфные функции. М. : Мир, 1966. 287 с.

Львовский
торгово-экономический институт

Поступила в редакцию
15.01.1980 г.