УДК 517.947.5.37

М. Л. Горбачук, А. И. Кашпировский

О слабых решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

1. Пусть $D[a, b]$ $(D(a, b))$ $(-\infty < a < b < \infty)$ — пространство бесконечно дифференцируемых, обращающихся вместе со своими производными в нуль на концах a и b промежутка $[a, b]$ (бесконечно дифференцируемых финитных) функций с топологией равномерной сходимости всех производных на компактах из $[a, b]$ (из (a, b)). Линейное непрерывное отображение из $D[a, b]$ $(D(a, b))$ в сепарабельное гильбертово пространство H называется векторнозначным распределением класса $D'(H, [a, b])$ $(D'(H, (a, b)))$ (см. [1]). В случае $H = R^1$ получаем соответствующие обычные распределения.

В класс $D'(H, [a, b])$ естественным образом вкладывается пространство $L^2(H, (a, b))$ суммируемых с квадратом нормы H-значных вектор-функций на (a, b), а именно: действие $u \in L^2(H, (a, b))$ на основную функцию $\varphi \in \in D[a, b]$ задается как $u[\varphi] = \int_a^b u(t)\varphi(t)\,dt$.

На векторнозначных распределениях $\omega \in D'(H, [a, b])$ $(D'(H, (a, b)))$ операция дифференцирования определена следующим образом:

$$\omega^{(n)}[\varphi] = (-1)^n \omega[\varphi^{(n)}] \tag{1}$$

$(\varphi \in D[a, b]$ $(\varphi \in D(a, b)))$.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(-1)^n y^{(2n)} + A^{2n} y = 0, \tag{2}$$

где $y(t)$ — вектор-функция со значениями в H, A — самосопряженный положительный оператор (считаем для простоты, что 0 — регулярная точка A).

Вектор-функцию $y(t)$ назовем обычным решением уравнения (2) внутри (a, b), если: а) $y(t)$ — $2n$ раз непрерывно дифференцируема в H; б) при каждом $t \in (a, b)$ $y(t) \in D(A^{2n})$ (через $D(A^{2n})$ обозначена область определения оператор A^{2n}); в) $y(t)$ удовлетворяют уравнению (2).

Распределение $\omega \in D'(H, (a, b))$ назовем обобщенным решением рассматриваемого уравнения, если

$$(-1)^n (\omega[\varphi], A^{2n} h) + (\omega[\varphi], A^{2n} h) = 0 \tag{3}$$

для произвольных $\varphi \in D(a, b)$, $h \in D(A^{2n})$ $((.,.)$ — скалярное произведение в H).

Основная цель этой работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. *Всякое обобщенное решение уравнения* (2) *является обычным внутри интервала* (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем в несколько этапов.

1. Для конечного промежутка $[a, b]$ обозначим через $\overset{0}{W}_m(H, [a, b])$ пополнение линейного многообразия $C_0^\infty(H, [a, b])$ вектор-функций вида $u(t) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(t) h_k$ $(\varphi_k \in D[a, b],\ h_k \in H,\ p \in N)$ по норме $\|u\|_m = \left(\sum_{k=0}^{m} \int_a^b \|u^{(k)}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, а через $W_{-m} = \overset{0}{W}_{-m}(H, [a, b])$ — пространство с негативной нормой, построенное по $\overset{0}{W}_m(H, [a, b])$ относительно $L^2(H, (a, b))$ (см. [2]). Докажем, что имеет место следующая лемма.

Л е м м а 1. $D'(H, [a, b]) = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_{-m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно показать (см. [3]), что пространство W_{-m} состоит из тех и только тех вектор-функций $\omega \in D'(H, [a, b])$, которые являются производными в смысле (1) порядка m от вектор-функций $u(t) \in \in L^2(H, (a, b))$. Отсюда уже следует вложение $\bigcup_{m=1}^{\infty} W_{-m} \subset D'(H, [a, b])$.

Наоборот, пусть $\omega \in D'(H, [a, b])$. На плотном в $\overset{0}{W}_m(H, [a, b])$ множестве $C_0^\infty(H, (a, b))$ распределение ω задает естественным образом антилинейный функционал:

$$(\omega,\ u) = \left(\omega,\ \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(t)\, h_k\right) = \sum_{k=1}^{p} (\omega[\overline{\varphi}_k],\ h_k).$$

Этот функционал допускает расширение по непрерывности на $\overset{0}{W}_k(H,\ [a,\ b])$ при некотором k. В самом деле, поскольку $D[a,\ b] = \lim \mathrm{pr}.\ \overset{0}{W}_m[a,\ b]$ (соответствующих $H = R^1$), то, как следует из [4, с. 68], найдутся такие $m \in N$ и $c = \mathrm{const} > 0$, что $\|\omega[\varphi]\|_H \leqslant c\|\varphi\|_{\overset{0}{W}_{m[a,\ b]}}$ для произвольного $\varphi \in D[a,\ b]$. Если теперь $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис функций из $D[a,\ b]$ в пространстве $\overset{0}{W}_m[a,\ b]$, то в силу квазиядерности вложения $\overset{0}{W}_{m+1}[a,\ b] \subset \overset{0}{W}[a,\ b]$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|\psi_k\|^2_{\overset{0}{W}_{m[a,\ b]}} < \infty$ и для $u(t) = \sum\limits_{k=1}^{p} \psi_k(t)\, h_k$ $(p \in N,\ h_k \in H)$

$$\left|\left(\omega,\ \sum_{k=1}^{p} \psi_k(t)\, h_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |(\omega[\overline{\psi}_k],\ h_k)| \leqslant c \sum_{k=1}^{p} \|\psi_k\|_{\overset{0}{W}_{m[a,\ b]}} \|h_k\|_H =$$

$$= c \sum_{k=1}^{p} \left(\|\psi_k\|^2_{\overset{0}{W}_{m[a,\ b]}}\right)\left(\|\psi_k\|^2_{\overset{0}{W}_{m+1[a,\ b]}} \|h_k\|^2\right)^{1/2} \leqslant c_1\|u\|_{m+1}.$$

Лемма доказана.

2. Пусть $G(\lambda)$ — непрерывная на $(0,\ \infty)$ функция такая, что $G(\lambda) > c > 0$, $G(\lambda)_{\lambda\to\infty} \to \infty$. На области определения оператора $G(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)\, dE_\lambda$ (E_λ — разложение единицы оператора A) введем скалярное произведение $(f,\ g)_G = (G(A) f,\ G(A) g)_H$ $(f,\ g \in D(G(A)))$, а соответствующее гильбертово пространство обозначим через H_G. Пространство с негативной нормой, построенное по H_G относительно H, обозначим H'_G. Пусть также $H_{(\alpha)} = \lim\limits_{\delta\to+0} \mathrm{ind}\, H_{G_{\alpha,\ \delta}}$, $H'_{(\alpha)} = \lim\limits_{\delta\to+0} \mathrm{pr}\, H'_{G_{\alpha,\ \delta}}$, $H_{(1)} = H_+$, $H'_{(1)} = H_-$, где $G_{\alpha,\ \delta}(\lambda) = \exp(\delta\lambda^{1/\alpha})$ $(\alpha > 0)$, $H_n = H_{(\lambda+1)^n}$, $H_{-n} = H'_{(\lambda+1)^n}$, $H_{+\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{pr}\, H_n$, $H_{-\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{ind}\, H_{-n}$.

Лемма 2. *Векторнозначное распределение* $\omega \in D'(H,\ [a,\ b])$ *является обобщенным решением уравнения* (2) *тогда и только тогда, когда оно допускает представление вида*

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^{n} [e^{-\alpha_k \widehat{A}(t-a)} f_k + e^{-\alpha_k \widehat{A}(b-t)} g_k], \tag{4}$$

где $f_k,\ g_k \in H_{-\infty}$, $\widehat{A}$ — *расширение* A *на* H_- (см. [5]), α_k — *корни уравнения* $(-1)^n \alpha^{2n} + 1 = 0$, *имеющие положительные вещественные части. При этом* $\omega \in W_{-m}$ *тогда и только тогда, когда* $f_k,\ g_k \in H_{-m-1/2}$. *Представление* (4) *однозначно.*

Доказательство. Пусть $\omega \in D'(H,\ [a,\ b])$ — обобщенное решение уравнения (2). По лемме 1 $\omega \in W_{-m}$ с некоторым m, т. е. существует вектор-функция $u(t) \in L^2(H,\ (a,\ b))$ такая, что $\omega = u^{(m)}$ в смысле (1). При этом равенство (3) для ω перепишется в виде

$$(-1)^n \int_a^b (u(t),\ h)\, \varphi^{(2n+m)}(t)\, dt + \int_a^b (u(t),\ A^{2n} h)\, \varphi^{(m)}(t)\, dt, \tag{5}$$

где $h \in H_{2n}$, $\varphi \in D[a,\ b]$.

Обзоначим через Φ класс всех $u \in L^2(H, (a, b))$, удовлетворяющих (5). Тогда многообразие $\widetilde{\Phi} = \bigcup\limits_{\lambda > 0} E_\lambda \Phi$ плотно содержится в Φ, причем для каждого $u(t) \in \widetilde{\Phi}$ вектор-функция $u_\lambda(t) = E_\lambda u(t)$ $(\lambda > 0)$ является слабым решением уравнения

$$(-1)^n y^{(2n)} + A_\lambda^{2n} y = 0, \tag{6}$$

где $A_\lambda = E_\lambda A$. Ввиду ограниченности A_λ, $u_\lambda(t)$ — обычное решение уравнения (6), допускающее представление

$$u_\lambda(t) = \sum_{k=1}^{n} [e^{-\alpha_k A(t-a)} f'_k + e^{-\alpha_k A(b-t)} g'_k] + \sum_{j=0}^{m-1} t^j h_j, \tag{7}$$

в котором f'_k, g'_k, $h_j \in E_\lambda H$ (см. [6]).

Поскольку вектор-функции $e^{-\alpha_k A(t-a)} f'_k$, $e^{-\alpha_k A(b-t)} g'_k$, $t^j h_j$ при ненулевых f'_k, g'_k, h_j линейно независимы, то линейные многообразия

$$\widetilde{\Phi}_1 = \{u_\lambda \in \widetilde{\Phi}, \quad h_j = 0, \quad j = \overline{0, m-1}\}, \quad \widetilde{\Phi}_2 = \{u_\lambda \in \widetilde{\Phi}, \quad f'_k = g'_k = 0, \\ k = \overline{1, n}\}$$

линейно независимы в $\widetilde{\Phi}$ и, очевидно, $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}_1 \dot{+} \widetilde{\Phi}_2$.

Пусть Φ_1 и Φ_2 — замыкания в $L^2(H, (a, b))$ многообразий Φ_1 и Φ_2 соответственно и $\Phi_0 = \Phi_1 \dot{+} \Phi_2$. Как следует из [7], вектор-функции из Φ_1 имеют представление (4) с f'_k, $g'_k \in H_{-1/2}$. Нетрудно показать, что вектор-функции из Φ_2 представляются в виде $u(t) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} t^j y_j$ $(h_j \in H)$, и что многообразия Φ_1, Φ_2 линейно независимы. Тогда, поскольку $\widetilde{\Phi}$ плотно в Φ_0 и в Φ и Φ_1, Φ_2 замкнуты в $L^2(H, (a, b))$, то $\Phi = \Phi_1 \dot{+} \Phi_2 = \Phi_0$, т. е. $u(t) \in \in \Phi$ допускает представление (7) с f'_k, $g'_k \in H_{-1/2}$ и $h_j \in H$. Отсюда, вследствие равенства $\omega = u^{(m)}$, для ω получаем представление (4) с $f_k = (-\alpha_k \widehat{A})^m f'_k$, $g_k = (-\alpha_k \widehat{A})^m g'_k$. Так как f'_k, $g'_k \in H_{-1/2}$, то f_k, $g_k \in H_{-m-\frac{1}{2}} \subset H_{-\infty}$.

Наоборот, произвольная вектор-функция $\omega(t)$ вида (4) с f_k, $g_k \in H_{-\infty}$ (а значит, $H_{-m-\frac{1}{2}}$ с каким-либо $m > 0$) является производной m-го порядка в смысле (1) от некоторой вектор-функции $u(t) \in L^2(H, (a, b))$ вида (7) с f'_k, $g'_k \in H_{-\frac{1}{2}}$, являющейся решением уравнения (5). Тогда $\omega(t) = u^{(m)}(t)$ — обобщенное решение (2).

Из представления (4) следует, что $\omega(t)$ внутри интервала (a, b) бесконечно дифференцируема, а потому f_k и g_k однозначно определяется по значениям ω и ее производных до порядка $2n$ в любой фиксированной точке $c \in (a, b)$.

3. Пусть теперь $\omega \in D'(H, (a, b))$. Тогда для произвольного интервала $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ $\omega|_{D[\alpha, \beta]} \in D'(H, [\alpha, \beta])$. Поэтому обобщенное решение $\omega \in \in D'(H, (a, b))$ уравнения (2) на каждом сегменте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ будет обобщенным решением (2) из $D'(H, [\alpha, \beta])$. В силу леммы 2 для любых δ_1, δ_2 таких, что $0 < \delta_2 < \delta_1 < \dfrac{b-a}{2}$ на $[a + \delta_i > b - \delta_i]$ $(i = 1, 2)$ справедливо представление

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^{n} [e^{-\alpha_k \widehat{A}(t-a-\delta_i)} f_k^{(i)} + e^{-\alpha_k \widehat{A}(b-\delta_i-t)} g_k^{(i)}], \tag{8}$$

где $f_k^{(i)}$, $g_k^{(i)} \in H_{-\infty}$ $(k=\overline{1, n})$. Ввиду однозначности представления $\omega(t)$ на $[a+\delta_2,\ b-\delta_2]$ получим:

$$f_k^{(1)} = e^{-\alpha_k \widehat{A}(\delta_2-\delta_1)} f_k^{(2)}, \quad g_k^{(1)} = e^{-\alpha_k \widehat{A}(\delta_2-\delta_1)} g_k^{(2)}.$$

Так как оператор e^{itA} унитарен в H_s при произвольных $t,\ s \in R^1$, то

$$f_k^{(1)},\ g_k^{(1)} \in e^{-\delta \widehat{A}} H \tag{9}$$

для всех δ таких, что $0 < \delta < \beta_k (\delta_1 - \delta_2)$, где $\beta_k = \operatorname{Re} \alpha_k$. Полагая $f_k = e^{\alpha_k \widehat{A} \delta_i} f_k^{(i)}$, $g_k = e^{\alpha_k \widehat{A} \delta_i} g_k^{(i)}$ (ясно, что f_k, g_k не зависят от выбора i), получаем для $\omega(t)$ в (a, b) представление (4). При этом, в силу произвольности δ в (9), нетрудно заключить, что $f_k,\ g_k \in H_-$.

Наоборот, предположим, что $\omega(t)$ — вектор-функция вида (4) с $f_k,\ g_k \in H_-$. Тогда на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ $\omega(t)$ — обычное решение, а, следовательно, и обобщенное из класса $D'(H, (a, b))$. Теорема полностью доказана.

Следствие. *Всякое обобщенное решение уравнения* (2) *на* (a, b) *является бесконечно дифференцируемым внутри этого интервала.*

3. Пусть K — класс всех обычных решений уравнения (2) на $(0, +\infty)$, ограниченных на ∞ по норме: $\exists c > 0$ такое, что $\| y(t) \|_H \leqslant C$ при $t > 1$, а K_γ — подкласс тех $y(t) \in K$, для которых $\int_0^\delta \| y(t) \|_H^2 \gamma(t)\, dt < \infty$, где $\gamma(t)$ — неотрицательная суммируемая на $(0, \delta)$ функция ($\delta > 0$ — произвольно). Подобно тому, как это делается в [5] для уравнения второго порядка, используя представление (4), можно получить следующую теорему.

Теорема 2. *Всякое решение* $y(t)$ *уравнения* (2) *класса* K *имеет однозначное представление*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha_k \widehat{A} t} f_k \quad (f_k \in H_-,\ k = \overline{1, n}), \tag{4'}$$

причем $y(t) \in K_\gamma$ *тогда и только тогда, когда* $f_k \in H_{G_k}$, *где*

$$G_k(\lambda) = \left(\int_0^\delta \gamma(t)\, e^{-2\beta_k \lambda t} dt \right)^{-1/2}, \quad \beta_k = \operatorname{Re} \alpha_k.$$

Для произвольной функции $y(t) \in K$ введем вектор $Y = (y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0))$. Обозначим также $\mathfrak{L}_{-\infty} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} H_{-\infty}$, $\mathfrak{H}_- = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H_-$, $\mathfrak{H}'_{(\alpha)} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H'_{(\alpha)}$.

Следствие. $Y \in \mathfrak{H}_- \Leftrightarrow y \in K$; $Y \in \mathfrak{H}_{-\infty} \Leftrightarrow \exists c,\ k > 0$ *такие, что* $| y(t) | \leqslant ct^{-k}$; $Y \in \mathfrak{H}'_{(\alpha)} \Leftrightarrow \forall a > 0$ $\exists c > 0$ *такое, что* $\| y(t) \|_H \leqslant c \exp(at^{-q})$ $(q = 1/(\alpha - 1))$.

4. Пример. Возьмем $H = L^2(-\infty, \infty)$, $A = \sqrt[2n]{A^{2n}}$, где A^{2n} — замыкание оператора, порожденного выражением $(-1)^l \dfrac{d^{2l}}{dx^{2l}} + x^{2m}$ $(l,\ m \in N)$. Тогда уравнение (2) запишется как

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + (-1)^l \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + x^{2m} u = 0 \quad (0 < t < \infty), \tag{10}$$

K — совокупность всех обычных решений в верхней полуплоскости уравнения (10), удовлетворяющих условию $| u(x, t) | \leqslant M(t)$, где $M(t)$ — невозрастающая на $(0, \infty)$ функция. При $\dfrac{n}{l} + \dfrac{n}{m} \geqslant 1$ $H_- = (S_{n/m}^{n/l})'$, где S_α^β — известные функциональные пространства (см. [8]). На основании следствия из теоремы 2 можно заключить, что:

а) $\exists c,\, k > 0 : |u(x, t)| \leqslant ct^{-k} \Leftrightarrow f_k \in S'$ (f_k участвуют в представлении (4′), S' — пространство обобщенных функций медленного роста;

б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists c > 0$: $|u(x, t)| \leqslant c \exp(at^{-q}) \Leftrightarrow f_k \in S^{\lambda n/l}_{\lambda n)m}$, где q и λ связаны соотношением $q = 1/(\lambda - 1)$, $\lambda > 1$.

1. Schwartz L. Theorie des distributions â valeurs vectorielles.— Ann. Inst. Fourier, 1957, 7, p. 1—141.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К. : Наук. думка, 1965. 798 с.
3. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи. М. : Мир, 1971. 371 с.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М. : Мир, 1967. 624 с.
5. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1977, **102**, № 1, с. 124—150.
6. Рофе-Бекетов Ф. С. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях.— Мат. сб., 1960, **51**, № 3, с. 293—342.
7. Горбачук М. Л., Кочубей А. Н. Самосопряженные граничные задачи для некоторых классов дифференциальных операторов.— Докл. АН СССР, 1971, 201, № 5, с. 1029—1032.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М. : Физматгиз, 1958. 308 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
9.10.1979 г.