УДК 7.974.36

Г. М. Губреев, В. А. Пригорский

О приводимости ограниченных представлений абелевых полугрупп

Настоящая работа посвящена обобщению теоремы из работы [1, с. 96] на случай ограниченных представлений абелевых полугрупп в комплексном гильбертовом пространстве.

Пусть G — произвольная абелева полугруппа, а $g \to T(g)$ $(g \in G)$ ее представление в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ $(\dim \mathfrak{H} > 1)$. Это представление будем называть ограниченным, если $\sup_{g \in G} \| T(g) \| = c < \infty$. В дальнейшем исключается из рассмотрения тот тривиальный случай, когда все операторы представления $T(g)$ кратны единичному оператору, т. е. $T(g) \neq c(g) I$, $c(g) \in \mathbf{C}$ для всех $g \in G$.

Примем следующее определение, обобщающее понятие эквивалентных представлений:

Два представления $g \to T_i(g)$ $(i = 1, 2)$ полугруппы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ назовем квазиэквивалентными, если существуют такие линейные ограниченные операторы X, Y ($\operatorname{Ker} X = \operatorname{Ker} Y = \{0\}$, $\overline{\operatorname{Ran} X} = \overline{\operatorname{Ran} Y}$*) $= \mathfrak{H}$), что $T_1(g) X = X T_2(g)$, $Y T_1(g) = T_2(g) Y$ для всех $g \in G$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Представление $g \to T(g)$ произвольной абелевой полугруппы G в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ квазиэквивалентно некоторому унитарному представлению $g \to U(g)$, если оно ограничено и для каждого $h \in \mathfrak{H}$ $(h \neq 0)$ $\inf_{g \in G} \| T(g) h \| > 0$, $\inf_{g \in G} \| T^*(g) h \| > 0$.*

---

*) Для любого отображения F множества M_1 в M_2 полагаем $\operatorname{Ran} F = F(M_1)$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы заметим, что на каждой абелевой полугруппе можно ввести отношение частичного порядка, при котором за любыми двумя элементами $g_1, g_2 \in G$ следует их произведение $g_1 g_2$. Действительно, в силу представления Кэли [2 ,с. 19] каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие отображение $\hat{g}$ полугруппы G в себя, заданное равенством $\hat{g}(s) = gs$, $s \in G$. На множестве G введем отношение частичного порядка [3, с. 14] считая, что $g_1 \leqslant g_2$, если $\operatorname{Ran} \hat{g}_1 \supseteq \operatorname{Ran} \hat{g}_2$. Далее, обозначая суперпозицию отображений $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$ через $\hat{g}_1 \circ \hat{g}_2$, получаем: $\operatorname{Ran} \widehat{g_1 g_2} = \operatorname{Ran} (\hat{g}_1 \circ \hat{g}_2) \subseteq \operatorname{Ran} \hat{g}_1$, что означает $g_1 \leqslant g_1 g_2$. Аналогично $g_2 \leqslant g_1 g_2$. Таким образом, относительно рассмотренного отношения частичного порядка множество G является направленным.

Пусть $M_{\mathbf{C}}(G)$ означает множество всех ограниченных комплекснозначных функций, заданных на полугруппе G. Предлагаемое доказательство теоремы 1 опирается на технику банахова предела на линейном пространстве $M_{\mathbf{C}}(G)$, существование которого гарантируется следующей леммой.

Лемма. *На пространстве $M_{\mathbf{C}}(G)$ существует линейный функционал, в дальнейшем обозначаемый* $\operatorname{Lim} x(g)$ $(x(g) \in M_{\mathbf{C}}(G))$, *удовлетворяющий следующим условиям*:

1) *для любой вещественнозначной функции* $x(g) \in M_{\mathbf{C}}(G)$ $\inf\limits_{g \in G} x(g) \leqslant \operatorname{Lim} x(g) \leqslant \sup\limits_{g \in G} x(g)$;

2) *если существует предел* $\lim x(g)$ *по направленному множеству* G, *то* $\operatorname{Lim} x(g) = \lim x(g)$;

3) *для любого* $s \in G$ $\operatorname{Lim} x(gs) = \operatorname{Lim} x(g)$.

Доказательство. Пусть $M_R(G)$ обозначает подпространство*) пространства $M_{\mathbf{C}}(G)$, состоящее из всех вещественных функций с калибровочной функцией $p(x) = \sup\limits_{g \in G} x(g)$ [4, с. 81], а L $(L \subset M_R(G))$ — подпространство всех функций $x(g)$, для которых существует $\lim x(g)$ по направленному множеству G. Кроме того, пусть $\mathfrak{G}$ — абелева полугруппа эндоморфизмов S пространства $M_R(G)$, порождаемая полугруппой G по правилу $(Sx)(g) = x(gs)$, где $s \in G$. Так как $\lim x(g) = \lim x(gs) = \lim (Sx)(g)$ для любого $s \in G$, то подпространство L инвариантно относительно действия полугруппы $\mathfrak{G}$. Отметим также, что $p(S(x)) = \sup\limits_{g \in G} x(gs) \leqslant \sup\limits_{g \in G} x(g) = p(x)$. Положим $f_0(x) = \lim x(g)$ для всех $x \in L$. Очевидно, что $f_0(x) \leqslant p(x)$, $x \in L$ и $f_0(S(x)) = \lim x(gs) = \lim x(g) = f_0(x)$.

Следовательно, находимся в условиях применимости теоремы Эгнью—Морса [4, с. 222]. Поэтому на $M_R(G)$ существует линейный функционал $\operatorname{Lim} x(g)$, являющийся продолжением линейного функционала f_0 и удовлетворяющий условиям:

а) $\operatorname{Lim} x(g) \leqslant \sup\limits_{g \in G} x(g)$, $x(g) \in M_R(G)$

б) $\operatorname{Lim} x(gs) = \operatorname{Lim} x(g)$, $s \in G$.

Кроме того, для любой функции $x(g) \in M_R(G)$ имеем $-\operatorname{Lim} x(g) = \operatorname{Lim}[-x(g)] \leqslant \sup[-x(g)] = -\inf x(g)$, или $\operatorname{Lim} x(g) \geqslant \inf\limits_{g \in G} x(g)$. Далее, если $x(g) \in M_{\mathbf{C}}(G)$, то положим $\operatorname{Lim} x(g) = \operatorname{Lim} \operatorname{Re} x(g) + i \operatorname{Lim} \operatorname{Im} x(g)$. Нетрудно проверить, что полученный таким образом функционал $\operatorname{Lim} x(g)$ удовлетворяет всем утверждениям леммы.

Доказательство теоремы 1. Поскольку при любых $h, f \in \mathfrak{H}$ $|(T(g)h, T(g)f)| \leqslant \|T(g)h\| \|T(g)f\| \leqslant c^2 \|f\| \|h\|$, то, пользуясь доказанной леммой, рассмотрим на пространстве $\mathfrak{H}$ ограниченный билинейный функционал

$$(h, f)_1 = \operatorname{Lim} (T(g)h, T(g)f). \tag{1}$$

*) Здесь термин «подпространство» понимается в алгебраическом смысле.

Так как $(h, h)_1 = \operatorname{Lim}(T(g)h, T(g)h) \geqslant \inf\limits_{g\in G} \| T(g)h\|^2$, то соотношение (1) задает на $\mathfrak{H}$ новое скалярное произведение. Далее, для операторов представления $T(g)$ имеем:

$$(T(s)h, T(s)f)_1 = \operatorname{Lim}(T(g)T(s)h, T(g)T(s)f) = \operatorname{Lim}(T(gs)h, T(gs)f) =$$
$$= \operatorname{Lim}(T(g)h, T(g)f) = (h, f)_1, \; h, f \in \mathfrak{H}, \; s \in G.$$

С другой стороны, существует линейный ограниченный оператор A [5, с. 73], удовлетворяющий соотношению $(h, f)_1 = (Ah, f)$ при любых $h, f \in \mathfrak{H}$. Ввиду неравенства $(Ah, h) \geqslant \inf \| T(g)h\|^2 > 0$, $h \neq 0$ заключаем, что A — неотрицательный оператор с тривиальным ядром и плотной в $\mathfrak{H}$ областью изменения. Поэтому этими же свойствами обладает и оператор $X = \sqrt{A}$.

Для любого $g \in G$ выполняется:

$$\| XT(g)h\|^2 = (XT(g)h, XT(g)h) = (X^2T(g)h, T(g)h) = (AT(g)h, T(g)h) =$$
$$= (T(g)h, T(g)h)_1 = (h, h)_1 = (Ah, h) = \| Xh\|^2.$$

Следовательно, для произвольного вектора $h \in \operatorname{Ran} X$ имеем $\| XT(g) \times X^{-1}h\| = \| h\|$. Последнее означает, что при каждом $g \in G$ оператор $XT(g)X^{-1}$ может быть продолжен по непрерывности до изометрического отображения $U_1(g)$, которое на самом деле является унитарным. Действительно, поскольку из условий теоремы вытекает, что $\overline{\operatorname{Ran} T(g)} = \mathfrak{H}$, то $U_1(g)\mathfrak{H} = U_1(g)\overline{X\mathfrak{H}} = \overline{U_1(g)X\mathfrak{H}} = \overline{XT(g)\mathfrak{H}} = \overline{XT(g)\mathfrak{H}} = \overline{X\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$. Таким образом, существует такое семейство унитарных операторов $U_1(g)$, что

$$XT(g) = U_1(g)X. \tag{2}$$

Из последнего соотношения следует справедливость равенства $U_1(g_1g_2)X = U_1(g_1)U_1(g_2)X$ при любых $g_1, g_2 \in G$. Следовательно, $g \to U_1(g)$ — унитарное представление полугруппы G.

Далее, применяя предыдущие рассуждения к операторам $T^*(g)$, построим унитарное представление $g \to U_2(g)$, для которого $Y^*T^*(g) = U_2^*(g)Y^*$, $\operatorname{Ker} Y = \{0\}$, $\overline{\operatorname{Ran} Y} = \mathfrak{H}$. Переходя к сопряженным операторам, получаем

$$T(g)Y = YU_2(g) \tag{3}$$

Покажем, что представления $g \to U_i(g)$ $(i = 1, 2)$ унитарно эквивалентны. Полагая $Z = XY$, имеем

$$U_1(g)Z = ZU_2(g), \quad Z^*U_1^*(g) = U_2^*(g)Z^* \tag{4}$$

и, значит, $U_2(g)Z^* = Z^*U_1(g)$. Из последних соотношений заключаем, что $U_2(g)Z^*Z = Z^*ZU_2(g)$, а поэтому

$$U_2(g)\sqrt{Z^*Z} = \sqrt{Z^*Z}\,U_2(g). \tag{5}$$

Так как в полярном представлении оператора $Z = V\sqrt{Z^*Z}$ оператор V — унитарный, то из равенств (4), (5) вытекает $U_1(g)Z = U_1(g)V\sqrt{Z^*Z} = ZU_2(g) = V\sqrt{Z^*Z}\,U_2(g) = VU_2(g)\sqrt{Z^*Z}$, что равносильно равенству $U_1(g)V = VU_2(g)$. После этого соотношение (2) перепишется в виде $U_2(g)V^{-1}X = V^{-1}XT(g)$, что вместе с (3) означает квазиэквивалентность $g \to T(g)$ унитарному представлению $g \to U_2(g)$. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Заметим, что условия доказанной теоремы влекут выполнение следующих неравенств:

$$\operatorname{Lim} \| T(g)h\|^2 > 0, \quad \operatorname{Lim} \| T^*(g)h\|^2 > 0 \tag{6}$$

при любых $h \in \mathfrak{H}$ ($h \neq 0$). Анализируя доказательство, приходим к выводу, что утверждение теоремы 1 остается в силе, если ее условия заменить соотношениями (6). Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть $g \to T(g)$ ограниченное, не кратное* 1 *представление абелевой полугруппы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если существует пара таких векторов $h_1, h_2 \in \mathfrak{H}$, что*

$$\inf_{g \in G} \| T(g) h_1 \| > 0, \quad \inf_{g \in G} \| T(g) h_2 \| > 0, \tag{7}$$

то представление $g \to T(g)$ приводимо.

Доказательство. Рассмотрим следующие возможные случаи:

1. В пространстве $\mathfrak{H}$ имеются такие векторы $h \neq 0$, что $\mathrm{Lim} \| T(g) h \|^2 = 0$. Множество L таких векторов образует подпространство пространства $\mathfrak{H}$. Действительно, пусть $h_1, h_2 \in L$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Тогда

$$0 \leqslant \mathrm{Lim} \| T(g)(h_1 + h_2) \|^2 \leqslant \mathrm{Lim}\, 2 [\| T(g) h_1 \|^2 + \| T(g) h_2 \|^2] = 0,$$

$$0 \leqslant \mathrm{Lim} \| T(g)(\lambda h_1) \|^2 = |\lambda|^2 \,\mathrm{Lim} \| T(g) h_1 \|^2 = 0.$$

Далее, если $h_n \to h$, $h_n \in L$, то

$$\mathrm{Lim} \| T(g) h \|^2 = \mathrm{Lim} \| T(g) h \|^2 - \mathrm{Lim} \| T(g) h_n \|^2 =$$

$$= \mathrm{Lim}\, [\| T(g) h \|^2 - \| T(g) h_n \|^2] \leqslant \sup_{g \in G} [\| T(g) h \| + \| T(g) h_n \|] \times$$

$$\times [\| T(g) h \| - \| T(g) h_n \|] \leqslant c_1 \| T(g)(h - h_n) \| \leqslant c_2 \| h - h_n \|,$$

откуда вытекает, что $h \in L$. Таким образом, $L = \{h : \mathrm{Lim} \| T(g) h \|^2 = 0\}$ — подпространством $\mathfrak{H}$, которое, как это следует из условия теоремы, нетривиально. Легко заметить, что L приводит представление $g \to T(g)$. В самом деле, $\mathrm{Lim} \| T(g) T(s) h \|^2 = \mathrm{Lim} \| T(gs) h \|^2 = \mathrm{Lim} \| T(g) h \|^2 = 0$ для любого $h \in L$.

2. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ существуют векторы $h \neq 0$, для которых $\mathrm{Lim} \| T^*(g) h \|^2 = 0$. Тогда, как и в случае 1, существует нетривиальное подпространство, приводящее представление $g \to T(g)$.

3. При всех $h \in \mathfrak{H}$ ($h \neq 0$) $\mathrm{Lim} \| T(g) h \|^2 > 0$, $\mathrm{Lim} \| T^*(g) h \|^2 > 0$.

В силу замечания к теореме 1 приходим к выводу, что представление $g \to T(g)$ квазиэквивалентно некоторому унитарному представлению $g \to U(g)$. При условии, что $\dim \mathfrak{H} > 1$, $g \to U(g)$ не кратно 1, из спектральной теории унитарных операторов вытекает наличие нетривиального ультраинвариантного относительно операторов $U(g)$ подпространства. Тогда, согласно теореме 5.1 [1, с. 92], существует нетривиальное ультраинвариантное относительно оператора $T(g)$ (при каком-нибудь $g \in G$) подпространство, которое и приводит представление $g \to T(g)$, поскольку полугруппа G абелева. Теорема доказана.

Таким образом, теоремой 2 дается конструкция достаточно богатого запаса приводящих подпространств ограниченных представлений абелевых полугрупп, удовлетворяющих условиям (7).

1. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М. : Мир, 1970. 431 с.
2. Холл М. Теория групп. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 468 с.
3. Данфорд Н., Шварц Т. Линейные операторы, общая теория. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
4. Эдварс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М. : Мир, 1969. 895 с.
5. Ахиезер Н. И. Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Высшая школа, 1977, 1, 315 с.

Симферопольский
государственный университет

Поступила в редакцию
8. 10. 1979