УДК 517.5

Н. И. Нагнибида

О вольтерровых операторах, удовлетворяющих некоторым соотношениям

Через $A_R (0 < R \leqslant \infty)$ обозначим, как обычно, пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости. Вольтерровым оператором договоримся называть линейный непрерывный в пространстве A_R оператор W вида

$$(Wf)(z) = \alpha f(z) + \int_0^z k(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta \quad (\forall f \in A_R), \tag{1}$$

где α — фиксированное комплексное число; ядро $k(z, \zeta)$ — функция, аналитическая в бицилиндре $\{|z| < R, |\zeta| < R\}$. Простейшими представителями этого класса отображений пространства A_R в себя являются операторы обычного интегрирования I^p $(p \in N)$, т. е.

$$(I^p f)(z) = \int_0^z \frac{(z-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f(\zeta) d\zeta \quad (\forall f \in A_R).$$

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные со свойствами операторов вида (1), коммутирующих с I^p $(p \in \mathbf{N})$, а также изучим вопрос о вольтерровых решениях конкретных операторных уравнений. Полученные утверждения применяются к решению соответствующих интегральных уравнений и систем алгебраических уравнений с бесконечным числом переменных. Поэтому напомним [1], что если оператор W коммутирует в пространстве A_R с при некотором натуральном p, то он также обязательно коммутирует с I^p при некотором натуральном p, то он также обязательно коммутирует с I и, следовательно [2], его ядро $k(z, \zeta)$ является функцией, зависящей лишь от разности аргументов. Другими словами, в этом случае

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} k! \varphi_k I^k \tag{2}$$

(здесь $I^0 = E$ — оператор тождественного преобразования пространства A_R), причем его характеристическая функция $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k \in A_R$, или же (что равносильно)

$$(Wf)(z) = \varphi_0 f(z) + \int_0^z \varphi'(z-\zeta) f(\zeta) d\zeta. \tag{3}$$

Кроме того [3, 4], оператор W вида (1) осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства A_R на себя (т. е. является изоморфизмом этого пространства) тогда и только тогда, когда $\alpha \neq 0$.

С целью упрощения в дальнейшем записей и формулировок введем следующие обозначения: $\mathfrak{L}(A_R)$ — класс всех линейных непрерывных отображений пространства A_R в себя; $\mathfrak{L}^0(A_R)$ — класс всех изоморфизмов A_R на себя; S_α — оператор вида (2) или (3) (оператор свертки), определяемый с помощью последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ или функции $\alpha(t)$; $S(A_R)$ — множество всех операторов свертки в пространстве A_R; $R(p, S_\alpha)$ — класс всех операторов из $\mathfrak{L}(A_R)$, удовлетворяющих уравнению $X^p = S_\alpha$; $R_s(p, S_\alpha)$ — совокупность всех решений уравнения $X^p = S_\alpha$ в классе $S(A_R)$; K_p (соответственно K_p^0) — подкласс операторов из $\mathfrak{L}(A_R)$ (соответственно $\mathfrak{L}^0(A_R)$), коммутирующих с I^p; $b_n^{(p)}$ $(n=0, 1, \dots)$ — коэффициенты разложения функции $\sqrt[p]{1+x}$ вещественной переменной x в степенной ряд.

1. Отметим, что если S_φ — изоморфизм пространства A_R вида (2), т. е. $S_\varphi \in K_p^0$, то обратный к нему оператор S_φ^{-1} всегда можно выписать в явном виде. При этом следует лишь воспользоваться результатами заметки [4].

Действительно, пусть $S_\varphi = \varphi_0 E + \nu!\, \varphi_\nu I^\nu + \dots$, где $\varphi_0 \neq 0$ и $\varphi_\nu \neq 0$. Тогда существует [4] такой оператор $T \in \mathfrak{L}^0(A_R)$, что $S_\varphi = T(\varphi_0 E + \nu! \varphi_\nu I^\nu) T^{-1}$, т. е. операторы S_φ и $\varphi_0 E + \nu! \varphi_\nu I^\nu$ эквивалентны между собой. Поэтому $S_\varphi^{-1} = T(\varphi_0 E + \nu!\, \varphi_\nu I^\nu)^{-1}\, T^{-1}$ и, поскольку

$$(\varphi_0 E + \nu! \varphi_\nu I^\nu)^{-1} = \frac{1}{\varphi_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\nu! \varphi_\nu}{\varphi_0}\right)^k I^{k\nu},$$

$$S_\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\nu! \varphi_\nu}{\varphi_0}\right)^k (T I^\nu T^{-1})^k =$$

$$= \frac{1}{\varphi_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\nu! \varphi_\nu}{\varphi_0}\right)^k \left(\frac{S_\varphi - \varphi_0 E}{\nu! \varphi_\nu}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi_0 E - S_\varphi)^k}{\varphi_0^{k+1}}.$$

Рассматриваемые здесь операторные ряды имеют смысл.

Следовательно, верна теорема.

Теорема 1. *Если вольтерров оператор W вида* (1) *коммутирует с I^p при некотором натуральном p и является изоморфизмом пространства A_R на себя, то*

$$W^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha E - W)^k}{\alpha^{k+1}}.$$

Следствие 1. *Пусть $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k \in A_R$, а $g(z)$ — фиксированная функция из этого же пространства. Тогда при $\alpha \neq 0$ уравнение*

$$\alpha x(z) + \int_0^z \varphi(z-\zeta)\, x(\zeta)\, d\zeta = g(z) \tag{4}$$

имеет в A_R единственное решение $x(z)$, причем

$$x(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} \left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} k! \varphi_k I^{k+1}\right]^n g\right)(z).$$

Пример. Исходя из этой общей формулы, можно подсчитать, что решение уравнения $\alpha x(z) + \beta \int_0^z x(\zeta)\, d\zeta = g(z)$ представимо в виде $x(z) = \frac{1}{\alpha} g(z) - \frac{\beta}{\alpha^2} \int_0^z \exp\left\{\frac{\beta}{\alpha}(z-\zeta)\right\} g(\zeta)\, d\zeta.$

Для уравнения (4) при $\alpha = 0$ справедливо следствие.

Следствие 2. *Если $\varphi(t) = \sum_{k=l}^{\infty} \varphi_k t^k \in A_R$, причем $\varphi_l \neq 0$, то уравнение*

$$\int_0^z \varphi(z-\zeta)\, x(\zeta)\, d\zeta = g(z)$$

имеет в пространстве A_R *решение тогда и только тогда, когда* $g(z) = z^{l+1} g_1(z)$. *В этом случае*

$$x(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{l!\varphi_l}\right)^{n+1}\left(\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+l+1)!\,\varphi_{k+l+1}I^{k+1}\right]^n D^{l+1}g\right)(z),$$

где $D = \dfrac{d}{dz}$.

2. Обратимся теперь к вопросу о вольтерровых решениях операторного уравнения вида

$$X^p = S_\varphi, \tag{5}$$

где $S_\varphi \in S(A_R)$. Напомним [5], что вольтерровыми решениями уравнения $X^p = I^p$ являются только операторы вида εI, где $\varepsilon^p = 1$, а каждое решение вольтеррового типа более общего уравнения $X^p = I^m$ $\left(\text{оно существует лишь при условии } \dfrac{m}{p} \in \mathbf{N}\right)$ совпадает [1] с одним из операторов $\varepsilon I^{\frac{m}{p}}$, где также $\varepsilon^p = 1$.

Исходя из результатов работ [4, 5], в [8] показано, в частности, что если $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{\nu-1} = 0$, а $\varphi_\nu \neq 0$, то каждое решение соответствующего уравнения (5) (оно существует лишь при $\nu/p \in \mathbf{N}$) эквивалентно оператору $\sqrt[p]{\nu!\varphi_\nu}_{(0)}\, I^{\nu/p}$, где под $\sqrt[p]{\nu!\varphi_\nu}_{(0)}$ понимается одно из значений корня p-й степени из $\nu!\varphi_\nu$. Если же $\varphi_0 \neq 0$, то множество $R(p, S_\varphi)$ совпадает с совокупностью операторов вида

$$A\sqrt[p]{\varphi_0}_{(0)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!\varphi_k}{\varphi_0}I^k\right)^n, \tag{6}$$

где A — произвольный корень p-й степени из единичного оператора E, коммутирующий с S_φ. (Как следует из [3], в классе $S(A_R)$ корнями p-й степени из E являются только операторы εE, где $\varepsilon^p = 1$).

Остановимся на рассмотрении этих случаев более подробно (с точки зрения описания решений уравнения (5) в классе $S(A_R)$).

Пусть $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{\nu-1} = 0$, а $\varphi_\nu \neq 0$. Тогда для разрешимости уравнения (5) необходимо условие $\nu/p \in \mathbf{N}$ и всякое его решение из $S(A_R)$ определяется по формуле $X = I^{\nu/p}S_\psi$, где S_φ $(\psi_0 \neq 0)$ — произвольное решение в этом же классе уравнения $Y^p = \sum\limits_{k=\nu}^{\infty} k!\varphi_k I^{k-\nu}$. Итак, все сводится к уравнению $Y^p = S_\alpha$ $(\alpha_0 \neq 0)$, каждое решение которого, как указывалось выше, совпадает с одним из операторов вида (6).

Следовательно, возникает вопрос о нахождении условий, при выполнении которых все операторы в A_R, перестановочные с данным оператором S_α, содержатся в $S(A_R)$.

Теорема 2. *Для того чтобы всякий линейный непрерывный в* A_R *оператор, коммутирующий с* S_α, *принадлежал* $S(A_R)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\alpha_1 \neq 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{\nu-1} = 0$, а $\alpha_\nu \neq 0$ $(\nu \geqslant 2)$. Покажем, что в этом случае среди коммутирующих с S_α операторов имеются и такие, которые не принадлежат $S(A_R)$. Действительно, так как $S_\alpha = T(\alpha_0 E + \nu!\alpha_\nu I^\nu)T^{-1}$ $(T \in \mathfrak{L}^0(A_R))$, то оператор B коммутирует с S_α в том и только том случае, когда $T^{-1}BT$ перестановочен с I^ν. Положим, например, $T^{-1}BT = P_q$ (т. е. $B = TP_qT^{-1}$), где

$$(P_q f)(z) = P_q\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k\nu+q} z^{k\nu+q} \quad \forall f \in A_R,\ q = 0, 1, \ldots, \nu - 1.$$

Оператор P_q принадлежит, очевидно, множеству K_ν, но оператор $B = TP_qT^{-1}$ принадлежать классу $S(A_R)$ не может, так как операторы вида (2) в пространстве A_R не имеют нетривиальных нулей, а P_q такими нулями обладает. Это противоречит равенству $B = TP_qT^{-1}$, т. е. эквивалентности B и P_q.

В случае, когда $\alpha_k = 0$ $\forall k \geqslant 1$, с оператором S_α коммутирует любой линейный непрерывный в A_R оператор (а не только операторы из $S(A_R)$). Этим и завершается доказательство необходимости утверждения.

Достаточность. Пусть $\alpha_1 \neq 0$, т. е. $S_\alpha = \alpha_0 E + T_0 \alpha_1 I T_0^{-1}$, где $T_0 \in \mathfrak{L}^0(A_R)$, и оператор B коммутирует с S_α. Отсюда, как и выше, заключаем, что $T_0^{-1}BT_0$ коммутирует с I. Поэтому [2], $T_0^{-1}BT_0 = S_\varphi$, а $B = \sum_{n=0}^{\infty} n!\varphi_n \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} k!\,\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\, I^k\right)^n$. Следовательно, B перестановочен с I и, значит, $B \in S(A_R)$. Утверждение доказано.

Замечание 1. Теорему 2 любопытно сравнить с результатами заметок [6, 7], в которых, в частности, показано, что если $\varphi \in A_R$ и $\frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z} \neq 0$ при всех $|z| < R$, то каждый линейный непрерывный в A_R оператор, коммутирующий с умножением на φ, сам является оператором умножения на некоторую функцию из этого же пространства.

Следствие 3. *Если $\alpha_1 \neq 0$, то при $p \geqslant 2$ и $\alpha_0 = 0$ $R(p, S_\alpha) = \varnothing$, а при $\alpha_0 \neq 0$ $R(p, S_\alpha) \subset S(A_R)$.*

Следствие 4. *Если $S_\alpha = \alpha_0 E + \nu!\alpha_\nu I^\nu$ $(\alpha_0, \alpha_\nu \neq 0)$, то $R(p, S_\alpha) \subset S(A_R) \Leftrightarrow \nu = 1$.*

Достаточность условия этого утверждения вытекает из следствия 3. Если же $\nu \neq 1$, то оператор вида (6), где $A = \sum_{q=0}^{\nu-1} \varepsilon_q P_q$ $(\varepsilon_q^p = 1, q = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$ и среди чисел ε_q не все равны между собой, является решением уравнения $X^p = \alpha_0 E + \nu!\alpha_\nu I^\nu$, но даже не вольтеррового типа.

Заметим, наконец, что в классе $S(A_R)$ уравнение $X^p = S_\alpha$ имеет ровно p решений и (см. (6))

$$R_s(p, S_\alpha) = \left\{\varepsilon \sqrt[p]{\alpha_0}_{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\alpha_k}{\alpha_0} I^k\right)^n\right\},$$

где $\varepsilon^p = 1$; $\sqrt[p]{\alpha_0}_{(0)}$ — одно из значений корня p-й степени из α_0.

Аналогично описываются и все решения в классе $S(A_R)$ уравнения $X^p = S_\alpha$ в этом случае, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{\nu-1} = 0$, а $\alpha_\nu \neq 0$. Как уже отмечалось, они существуют лишь при условии $\nu/p \in \mathbf{N}$ и их совокупность совпадает с множеством

$$\left\{\varepsilon \sqrt[p]{\nu!\alpha_\nu}_{(0)}\, I^{\nu/p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+\nu)!\,\alpha_{k+\nu}}{\nu!\alpha_\nu} I^k \right)^n \right\}. \tag{7}$$

Докажем теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы* $R(p, S_\alpha) = R_s(p, S_\alpha)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\alpha_0 \neq 0$ *и* $\alpha_1 \neq 0$.

Поскольку достаточность этих условий очевидна, остановимся на доказательстве их необходимости.

Если $\alpha_0 \neq 0$, а $\alpha_1 = 0$, то решение данного уравнения не вольтеррового типа может быть построено так, как и при доказательстве следствия 4.

Сложнее построить соответствующее решение в том случае, когда $\alpha_0 = 0$. Действительно, в этой ситуации $S_\alpha = I^{\nu p} S_{\tilde{\alpha}}$ ($\nu \geqslant 1$; $\tilde{\alpha}_0 \neq 0$). Поэтому (см. [4]) данное уравнение имеет вид $X^p = T_0 \tilde{\alpha}_0 I^{p\nu} T_0^{-1}$, где $T_0 \in \mathfrak{L}(A_R)$, а каждое его решение в классе $\mathfrak{L}(A_R)$ (как указывалось выше) представимо в виде

$$X = \sqrt[p]{\tilde{\alpha}_0}_{(0)}\, T_0 T I^\nu T^{-1} T_0^{-1}, \tag{8}$$

где $T \in K_{\nu p}^0$ [5].

Но

$$R_s(p, S_\alpha) = \{\varepsilon^l I^\nu S_\gamma\}_{l=0}^{p-1}, \tag{9}$$

где $\varepsilon^p = 1$, а S_γ — одно из решений уравнения $Y^p = S_{\tilde{\alpha}}$ в классе $S(A_R)$. Однако множества операторов (8) и (9) не могут совпадать, потому что в противном случае

$$\forall T_1, T_2 \in K_{\nu p}^0\, \exists\, l_0\, (0 \leqslant l_0 \leqslant p-1) : T_0 T_1 I^\nu T_1^{-1} T_0^{-1} = \varepsilon^{l_0} T_0 T_2 I^\nu T^{-1} T_0^{-1},$$

или же $T_1 I^\nu T_1^{-1} = \varepsilon^{l_0} T_2 I^\nu T_2^{-1}$. Полагая $T_2 = E$ и выбирая затем коммутирующий с $I^{p\nu}$ изоморфизм T_1 так, чтобы $T_1 I^\nu \neq \varepsilon^l I^\nu T_1$ $\forall l$ (это всегда возможно, если только учесть [2, 3] структуру матриц соответствующих операторов в степенном базисе пространства A_R), приходим к противоречию. Этим и завершается доказательство теоремы 3.

3. Приведем в заключение некоторые следствия, касающиеся разрешимости соответствующих систем алгебраических уравнений и специальных интегральных уравнений, ограничиваясь для простоты случаем $p = 2$.

Поскольку операторные ряды вида (2) умножаются (в чем нетрудно убедиться) по правилу умножения обычных степенных рядов, то соотношение $S_x^2 = S_\alpha$ равносильно следующей бесконечной системе алгебраических соотношений:

$$\sum_{n=0}^{k} n! x_n (k-n)!\, x_{k-n} = k!\alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

Поэтому верно следующее следствие.

Следствие 5. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \in A_R$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{\nu-1} = 0$, *а* $\alpha_\nu \neq 0$, *то система* (10) *разрешима в том и только том случае, когда* $\nu = 2l$ ($l \in \mathbf{N}$). *При этом каждое ее решение* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ (*их всего два*) *обладает тем свойством, что* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k t^k \in A_R$.

Замечание 2. Отметим, что в этом смысле решения аналогичной системы $\sum_{n=0}^{k} x_n x_{k-n} = \alpha_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ не всегда имеют те же свойства, что и правая часть, в чем убеждает нас пример функций $x(z) = \sqrt{1+z}$ (здесь следует понимать одну из однозначных ветвей корня) и $\alpha(z) = 1 + z$. Действительно, $[x(z)]^2 = \alpha(z)$, $\alpha(z) \in A_\infty$, а $x(z) \in A_1$.

Следствие 6. *Уравнение «самосвертки»*

$$\int_0^z x(z-\zeta)\, x(\zeta)\, d\zeta = \psi(z),^* \qquad (11)$$

где $\psi(z) \in A_R$, разрешимо в пространстве A_R относительно $x(z)$ тогда и только тогда, когда

$$\psi(z) = I^{2l+1}\psi^{(1)}(z) \qquad (\psi^{(1)}(0) \neq 0,\ l \in N). \qquad (12)$$

*При $l = 0$**) *все его решения $x(z)$ определяются по формуле*

$$x(z) = \varepsilon \sqrt[(0)]{\psi_0^{(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\, \psi_k^{(1)}}{\psi_0^{(1)}} I^k \right)^n 1, \qquad (13)$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство. Поскольку условие (12), очевидно, необходимо для разрешимости уравнения (11), то остается доказать лишь его достаточность и получить соотношение (13). Учитывая же, что (12) равносильно **) уравнению $IS_x^2 = IS\psi^{(1)}$, на основании следствия 3 заключаем, что

$$S_x = \varepsilon \sqrt[(0)]{\psi_0^{(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\psi_k^{(1)}}{\psi_0^{(1)}} I^k \right)^n,$$

откуда и следует (13).

Замечание 3. Используемая методика нахождения вольтерровых решений соответствующих уравнений применима и при решении систем таких же уравнений. Укажем лишь, что при этом все выкладки можно существенно упростить, если воспользоваться несложно проверяемым соотношением $K_m \cap K_n = K_l$, где l — наибольший общий делитель чисел m и n.

1. Нагнибида Н. И., Олийнык Н. П. О некоторых свойствах операторов Вольтерра в аналитических пространствах.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 4, с. 556—563.
2. Нагнибида Н. И. О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве.— Сиб. мат. журн., 1966, 7, № 6, с. 1306—1318.
3. Нагнибида Н. И. Изоморфизмы пространства аналитических функций в круге, перестановочные со степенью оператора интегрирования.— В сб. :Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Изд-во Харьк. ун-та, 1968, вып. 6, с. 184—188.
4. Нагнибида Н. И. К вопросу о приведении операторов Вольтерра в аналитических пространствах к простейшему виду.— Мат. заметки, 1975, 17, № 4, с. 625—630.
5. Нагнибида Н. И. О корнях из оператора кратного интегрирования в пространстве аналитических в круге функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, 42, № 6, с. 1426—1435.
6. Нагнибида Н. И. Операторы, перестановочные с операторами умножения на аналитические функции, и связанные с ними квазистепенные базисы. — В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Изд-во Харьк. ун-та, 1971, вып. 13, с. 63—66.

*) При $l \geqslant$ решения уравнения (11) описываются аналогично.

**) При этом следует учесть тот факт [2], что коммутирующие с I операторы совпадают на всем пространстве, если только совпадают их значения на функции, тождественно равной единице.

7. Захарюта В. П., Царьков М. Ю. Операторы, коммутирующие с умножением в пространствах аналитических функций одного переменного.— Мат. заметки, 1973, 13, № 2, с. 269—276.
8. Березовский Н. И., Нагнибида Н. И. О решениях одного операторного уравнения в пространстве аналитических в круге функций.— Доп. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с 5—9.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
23.IX 1979 г.