УДК 517.

Л. И. Новаковская

О построении осциллирующих решений нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\dot{y}(t) + \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-\tau) + \alpha_3 \dot{y}(t-\tau) = \varepsilon f(y(t), y(t-\tau), \dot{y}(t-\tau), \dot{y}(t)) \quad (t_0 \leqslant t < \infty), \tag{1}$$

где t_0 — фиксированная начальная точка, α_1, α_2, α_3 — параметры системы, ε — малый положительный параметр, функция $f(y(t), \dot{y}(t), \dot{y}(t-\tau), y(t-\tau))$ — аналитическая по совокупности всех своих аргументов, τ — запаздывание аргумента ($\tau > 0$, τ — const). Когда правая часть уравнения (1) не зависит от производной $\dot{y}(t-\tau)$ и $\alpha_3 = 0$, то получаем уравнение с запаздывающим аргументом. При рассмотрении неавтономных дифференциальных уравнений и уравнений с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t, x(t))$ приходится сталкиваться с некоторыми трудностями .

Решением уравнения (1) будем называть такую непрерывную функцию $y(t)$, которая при $t > t_0$ удовлетворяла бы уравнению (1), а на начальном множестве $E_{t_0} = [t_0 - \tau, t_0]$ удовлетворяла бы условиям $y(t)|_{t \in E_{t_0}} = \varphi_0(t)$, $\dot{y}(t)|_{t \in E_{t_0}} = \varphi_1(t)$, где $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$— заданные непрерывные начальные функции.

В данной работе рассматривается вопрос о построении осциллирующих [1] решений уравнений (1), используя широко распространенный асимптотический метод нахождения приближенных решений — метод теории возмущений [2].

Будем считать, что осциллирующее продолжение осциллирующего решения $y(t)$ на начальное множество E_{t_0} определяет это решение, т. е. рассматривается не все множество C_0 допустимых начальных функций, а лишь некоторое его подмножество $C \subset C_0$, которому соответствует осциллирующее решение, где C называют областью захвата [3]. Правая часть уравнения (1) такова, что удовлетворяет всем условиям теоремы существования и единственности [4] решения основной начальной задачи для уравнения (1).

Будем искать осциллирующее решение уравнения (1), используя идею асимптотического метода нелинейной механики [2]. Порождающее линейное уравнение ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{y}(t) + \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-\tau) + \alpha_3 \dot{y}(t-\tau) = 0 \tag{2}$$

будет иметь периодическое решение вида

$$y(t) = a\cos(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

(a, φ — произвольные константы) при условии, что частота ω удовлетворяет системе уравнений (исходя из характеристического уравнения линейного уравнения (2)):

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= \omega - \alpha_2 \sin\omega\tau + \alpha_3\omega\cos\omega\tau = 0, \\ D_2(\omega) &= \alpha_1 + \alpha_2\cos\omega\tau + \alpha_3\omega\sin\omega\tau = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно, при $\varepsilon = 0$, с учетом условий (4) уравнение (1) допускает периодическое решение вида (3). При $\varepsilon \neq 0$ решение ищем в виде ряда

$$y(t) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \tag{5}$$

где

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots$$

$$\dots \quad (\psi = \omega t + \varphi). \tag{6}$$

Функции $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi), \dots$, являются периодическими функциями аргумента ψ периода 2Π. Для однозначности определения функций $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi), \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$, как и в нелинейной механике, в качестве дополнительного условия примем условие отсутствия первой гармоники в выражениях для $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi), \dots$.

Тогда, принимая во внимание вышеизложенное, с учетом формул (5), (6) после некоторых преобразований получаем следующие формулы для нахождения искомых функций:

$$A_1(a) = \frac{g_1(a) D_1'(\omega) + h_1(a) D_2'(\omega)}{[D_1']^2 + [D_2'(\omega)]^2}, \quad B_1(a) = \frac{g_1(a) D_2'(\omega) - h_1(a) D_1'(\omega)}{a\{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2\}}; \tag{7}$$

$$v_0(a) = \frac{g_0(a)}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (\alpha_1 \neq -\alpha_2), \tag{8}$$

$$w_n(a) = \frac{g_n(a) D_1(n\omega) + h_n(a) D_2(n\omega)}{D_2^2(n\omega) + D_1^2(n\omega)}, \quad v_n(a) = \frac{g_n(a) D_2(n\omega) - h_n(a) D_1(n\omega)}{D_2^2(n\omega) + D_1^2(n\omega)}, \tag{9}$$

где $g_n(a)$, $h_n(a)$ — коэффициенты разложения в ряде Фурье правой части уравнения (1) [см. [1], $\varepsilon = 1$], $v_n(a)$, $w_n(a)$ $(n = 0, 2, 3, 4, \dots)$ — коэффициенты разложения в ряде Фурье функции $u_1(a, \psi)$. При этом $[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2 \neq 0$, так как комплексные корни $\lambda = \pm i\omega$ являются простыми корнями характеристического уравнения линейного уравнения (2).

Заметим, что уравнение (1), являясь уравнением 1-го порядка с отклоняющимся аргументом, задает лишь однопараметрическое семейство решений. Следовательно, будем искать лишь фиксированное значение амплитуды a, допуская произвольное изменение во времени начальной фазы φ $(\psi = \omega t + \varphi)$.

Из условия

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) = 0 \tag{10}$$

находим искомое стационарное значение амплитуды $a = a_0$ (a_0 — искомая амплитуда). Следовательно, уравнение (1) в первом улучшенном приближении имеет решение

$$y(t) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \tag{11}$$

где

$$a = a_0 \quad (a_0 \text{— const}), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) \tag{12}$$

и

$$B_1(a_0) = \frac{g_1(a_0) D_2'(\omega) - h_1(a_0) D_1'(\omega)}{a_0 \{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2\}}, \tag{13}$$

а

$$u_1(a_0, \psi) = \frac{g_0(a_0)}{\alpha_1 + \alpha_2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{g_n(a_0) D_1(n\omega) + h_n(a_0) D_2(n\omega)}{D_2^2(n\omega) + D_1^2(n\omega)} \sin n\psi + \right.$$

$$\left. + \frac{g_n(a_0) D_2(n\omega) - h_n(a_0) D_1(n\omega)}{D_2^2(n\omega) + D_1^2(n\omega)} \cos n\psi \right\}. \tag{14}$$

Для второго приближения ($\varepsilon = 2$) получаем следующие формулы нахождения искомых функций:

$$A_2(a) = \frac{(g_1^{(1)}(a) - \beta) D_1'(\omega) + (h_1^{(1)}(a) - \gamma) D_2'(\omega)}{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2}, \tag{15}$$

$$B_2(a) = \frac{(g_1^{(1)}(a) - \beta) D_2'(\omega) + (\gamma - h_1^{(1)}(a)) D_1'(\omega)}{a \{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2\}};$$

$$v_0^{(1)}(a) = \frac{g_0^{(1)}(a) - \dfrac{dv_0}{da}(1 - \alpha_1\tau + \alpha_3)}{\alpha_1 + \alpha_2} =$$

$$= \frac{g_0^{(1)}(a)(\alpha_1 + \alpha_2) - \dfrac{dg_0}{da} A_1 (1 - \alpha_1\tau + \alpha_3)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}, \tag{16}$$

$$v_n^{(1)}(a) = \frac{D_2(n\omega)[g_n^{(1)}(a) - s] + D_1(n\omega)[k - h_n^{(1)}(a)]}{D_2^2(n\omega) + D_1^2(n\omega)},$$

$$w_n^{(1)}(a) = \frac{D_1(n\omega)[g_n^{(1)}(a) - s] + D_2(n\omega)[h_n^{(1)}(a) - k]}{D_2^2(n\omega) + D_1^2(n\omega)}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \tag{17}$$

где $v_0^{(1)}(a)$, $v_n^{(1)}(a)$, $w_n^{(1)}(a)$ — коэффициенты разложения в ряде Фурье функции $u_2(a, \psi)$, а $g_n^{(1)}(a)$, $h_n^{(1)}(a)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — правой части уравнения (1) при $\varepsilon = 2$ [см. [2]] и

$$\beta = A_1 \frac{dB_1}{da} a \frac{1}{2} D_1''(\omega) - A_1 \frac{dA_1}{da} \frac{1}{2} D_2''(\omega) + A_1 B_1 D_1''(\omega) + a B_1^2 \frac{D_2''(\omega)}{2},$$

$$\gamma = A_1 \frac{dB_1}{da} a \frac{D_2''(\omega)}{2} + A_1 \frac{dA_1}{da} \frac{D_1''(\omega)}{2} + A_1 B_1 D_2''(\omega) - a B_1^2 \frac{D_1''(\omega)}{2},$$

$$s = A_1 \frac{dv_n}{da} D_1'(n\omega) - A_1 \frac{dw_n}{da} D_2'(n\omega) + B_1 w_n n (1 + \alpha_3 \cos n\omega\tau) +$$

$$+ \alpha_3 B_1 w_n n \sin n\omega\tau, \quad k = A_1 \frac{dv_n}{da} D_2'(n\omega) + A_1 \frac{dw_n}{da} D_1'(n\omega) + B_1 w_n \alpha_3 n \sin n\omega\tau -$$

$$- B_1 v_n n (1 + \alpha_3 \cos n\omega\tau). \tag{18}$$

Во втором приближении значение амплитуды a должно колебаться в пределах порождающей амплитуды a_0, т. е. колебание будет проходить с небольшими отклонениями искомой амплитуды от порождающей a_0. Поэтому во втором приближении имеем:

$$a = a_0 + \varepsilon a_1. \tag{19}$$

Тогда из уравнения $\varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) = 0$, учитывая соотношение (19), получаем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$a_1 = \frac{-A_2(a_0)}{A_1'(a_0)}. \tag{20}$$

Следовательно, во втором улучшенном приближении уравнение (1) будет иметь осциллирующее решение

$$y = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi), \tag{21}$$

где

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a_0 + \varepsilon a_1) + \varepsilon^2 B_2(a_0 + \varepsilon a_1) \tag{22}$$

и $B_1(a_0 + \varepsilon a_1)$, $B_2(a_0 + \varepsilon a_1)$ вычисляются по формулам (13) и (15), а $u_1(a_0 + \varepsilon a_1, \psi)$ по формуле (14),

$$u_2(a_0 + \varepsilon a_1, \psi) = v_0^{(1)}(a_0 + \varepsilon a_1) + \sum_{n=2}^{\infty} v_n^{(1)}(a_0 + \varepsilon a_1)\cos n\psi + w_n^{(1)}(a_0 + \varepsilon a_1)\sin n\psi.$$

Используя выше найденные формулы, записываем асимптотические разложения для простейшего дифференциального уравнения 1-го порядка вида

$$\dot{y}(t) + \omega y(t-\tau) = \varepsilon f(y(t), \dot{y}(t), y(t-\tau), \dot{y}(t-\tau)), \tag{23}$$

часто встречающегося в практических задачах (задачи экологии [5]). Линейное уравнение

$$\dot{y}(t) + ky(t-\tau) = 0 \quad (\omega = k) \tag{24}$$

данного уравнения исследовано в работах [6 7]. Шмидт при помощи строгого метода излучения так называемой трансцендентной функции показал, что уравнение (24) имеет периодическое решение

$$y(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t, \tag{25}$$

где c_1, c_2 — const, при условии, что частота ω удовлетворяет равенству $\omega = k = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\Pi}{2} \pm 2\Pi n\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. В работе [6] указано на то, что при выполнении равенства $\omega\tau = \frac{\Pi}{2}$, уравнение (24) имеет периодическое решение вида (3) и играет роль порождающего уравнения в теории квазилинейных колебаний.

Согласно изложенному выше при $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \omega$ для уравнения (23) имеем:

$$D_1(\omega) = \omega - \omega\sin\omega\tau = 0, \quad D_2(\omega) = \omega\cos\omega\tau = 0, \tag{26}$$

откуда

$$\omega\tau = \frac{\Pi}{2}. \tag{27}$$

Из найденных формул для уравнения (23) с учетом (26), (27) получим следующие формулы асимптотического разложения:

$$A_1(a) = \frac{g_1(a) - \omega\tau h_1(a)}{1 + \omega^2\tau^2} = 2\,\frac{2g_1(a) - \Pi h_1(a)}{4 + \Pi^2},$$

$$B_1(a) = \frac{-\omega\tau g_1(a) - h_1(a)}{(1+\omega^2\tau^2)\,a} = 2\,\frac{-\Pi g_1(a) - 2h_1(a)}{a\,(4+\Pi^2)}. \tag{28}$$

Функция $u_1(a, \psi)$ при различных значениях n будет иметь такой вид:

а) $n = 4k' + 1$ $(k' = 0, 1, 2, \ldots)$

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{\omega}\left[g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(g_n \sin n\psi - h_n \cos n\psi)\right] =$$

$$= \frac{2\tau}{\Pi}\left[g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(g_n \sin n\psi - h_n \cos n\psi)\right]; \tag{29}$$

б) $n = 4k' + 3$ $(k' = 0, 1, 2, \ldots)$

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{\omega}\left[g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} (g_n \sin n\psi - h_n \cos n\psi)\frac{1}{n+1}\right] =$$

$$= \frac{2\tau}{\Pi}\left[g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}(g_n \sin n\psi - h_n \cos n\psi)\right]; \tag{30}$$

в) $n = 4k'$ $(k' = 0, 1, 2, \ldots)$

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{\omega}\left[g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\{(ng_n + h_n)\sin n\psi + (g_n - nh_n)\cos n\psi\}\right]; \tag{31}$$

г) $n = 4k' + 2$ $(k' = 0, 1, 2, \ldots)$

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{\omega}\left[g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\{(ng_n - h_n)\sin n\psi - (g_n + nh_n)\cos n\psi\}\right] =$$

$$= \frac{2\tau}{\Pi}\left[g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\{(ng_n - h_n)\sin n\psi - (nh_n + g_n)\cos n\psi\}\right]. \tag{32}$$

Из первого уравнения системы (28) следует, что уравнение

$$g_1(a) - \omega\tau h_1(a) = g_1(a) - \frac{\Pi}{2}h_1(a) = 0 \tag{33}$$

дает возможность определить стационарное (искомое) значение амплитуды $a - a_0$. Тогда уравнение (23) в первом улучшенном приближении будет иметь периодическое решение вида (11)—(13), с учетом формул, записанных для данного уравнения. Во втором приближении для функций $A_2(a)$, $B_2(a)$ получим следующие формулы:

$$A_2(a) = \frac{g_1^{(1)}(a) - \omega\tau h_1^{(1)}(a)}{1+\omega^2\tau^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\omega\tau^2\left\{\omega\tau\left(A_1\frac{dA_1}{da} - aB_1^2\right) - \left(\frac{dB_1}{da}a - 2B_1\right)A_1\right\}}{1+\omega^2\tau^2}, \tag{34}$$

$$B_2(a) = \frac{-g_1^{(1)}(a)\,\omega\tau - h_1^{(1)}(a)}{1+\omega^2\tau^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\omega\tau^2\left\{A_1\frac{dA_1}{da}-aB_1^2+A_1\omega\tau\left(\frac{dB_1}{da}a+2B_1\right)\right\}}{1+\omega^2\tau^2}.$$

Тогда, во втором приближении уравнение (23) будет иметь решение (21), (22) (без учета $u_2(a,\psi)$), с учетом выше написанных формул.

Продолжая данный процесс, можно записать асимптотические разложения для уравнения (23) в любом приближении. Заметим, что используя найденные формулы для нелинейного уравнения вида

$$\dot{y}(t)+k_1y(t-\tau)+k_2y(t)=\varepsilon f(y(t),\ \dot{y}(t),\ y(t-\tau),\ \dot{y}(t-\tau)),\tag{35}$$

можно найти асимптотические разложения при выполнении равенства

$$\omega=\sqrt{k_1^2-k_2^2}=\frac{1}{\tau}\left\{\left[\Pi-\arccos\frac{k_2}{k_1}\right]+k\Pi\quad(k=0,1,2,\ldots)\right.$$

$$(k_1\neq\pm k_2,\ k_1>k_2,\ \alpha_1=k_2,\ \alpha_2=k_1,\ \alpha_3=0).\tag{36}$$

Рассмотрим пример и найдем его осциллирующее решение, используя данный процесс.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)=-x(t-g),\ \ g=c+c_2x^2(t),\ \ \dot{x}(0)=0,\tag{37}$$

исследованное в работе [6], где найдено периодическое решение уравнения (37) методом Пуанкаре — методом малого параметра. Там же указано, что $g=\frac{\Pi}{2}+\varepsilon(c_0+\bar{c}_2x^2(t))$, после чего уравнение (37) примет вид:

$$\dot{x}(t)=-x\left(t-\frac{\Pi}{2}-\varepsilon(c_0+\bar{c}_2x^2(t))\right).\tag{38}$$

Предполагая аналитичность функции $x(t-g)$ относительно аргумента, разлагая ее в ряд Тейлора по степеням ε и отбрасывая члены более высокого порядка малости (ε^i, $i=2,3,\ldots$) окончательно получаем следующее уравнение:

$$\dot{x}(t)+x\left(t-\frac{\Pi}{2}\right)=\varepsilon(c_0+\bar{c}_2x^2(t))\,\dot{x}\left(t-\frac{\Pi}{2}\right).\tag{39}$$

Для данного уравнения с учетом найденных формул имеем:

$$A_1=\frac{c_0a+\bar{c}_2a^3\,\frac{3}{4}}{1+\frac{\Pi^2}{4}},\quad B_1=\frac{\left(c_0+\bar{c}_2a^2\,\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{\Pi^2}{4}}\cdot\frac{\Pi}{2}\tag{40}$$

и $v_0(a)=0,\ v_n(a)=0\quad(n=2,3,\ldots),\ w_n(a)=0\quad(n\neq3)$,

$$w_3(a)=\frac{1}{16}\bar{c}_2a^3.\tag{41}$$

Согласно условию (10) с учетом (40), стационарное значение амплитуды

$$a_0=\sqrt{-\frac{4c_0}{3\bar{c}_2}}.\tag{42}$$

Следовательно, в первом улучшенном приближении имеем:

$$x(t) = \sqrt{-\frac{4c_0}{3\bar{c}_2}}\left\{\cos(t+\varphi) - \frac{\varepsilon}{12}c_0 \sin 3(t+\varphi)\right\}, \tag{43}$$

что соответствует решению, найденному в первом приближении (см. [6]).

Для второго приближения получим:

$$A_2(a_0) = A_2\left(\sqrt{\frac{-4c_0}{3\bar{c}_2}}\right) = \frac{\Pi c_0^2 a_0}{18(\Pi^2+4)},$$

$$B_2(a_0) = B_2\left(\sqrt{\frac{-4c_0}{3\bar{c}_2}}\right) = \frac{c_0^2}{9(\Pi^2+4)}; \tag{44}$$

стационарное значение амплитуды a

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 = a_0 + \varepsilon\frac{A_2(a_0)}{A_1'(a_0)} = \sqrt{\frac{-4c_0}{3\bar{c}_2}}\left(1+\varepsilon\frac{\Pi c_0}{144}\right). \tag{45}$$

Следовательно, уравнение (39) во втором приближении будет иметь осциллирующее решение

$$x(t) = \sqrt{\frac{-4c_0}{3\bar{c}_2}}\left\{\left(1+\varepsilon\frac{\Pi c_0}{144}\right)\cos\left(t+\varphi+\varepsilon^2\frac{c_0^2}{36}\right) - \right.$$

$$\left. -\varepsilon\frac{1}{12}c_0\sin\left(t+\varphi+\varepsilon^2\frac{c_0^2}{36}\right)\right\}, \tag{46}$$

где φ — начальное значение фазы ψ.

Продолжая далее, мы можем найти осциллирующее решение уравнения (39) в любом приближении, которое с увеличением степени точности является более точным и требует меньшей громоздкости при вычислении высших приближений, нежели решение, найденное в [6].

1. Шевело В. Н. Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. К. : Наук. думка, 1978. 151 с.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1974. 502 с.
3. Норкин С. Б. Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. К.: Наук. думка, 1977. с. 247—255.
4. Эльсгольц Л. Э. Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 259 с.
5. Колесов Ю. С., Швитра Д. И. Роль запаздывания в математических моделях экологии.— Лит. мат. сб., 1979, **19**, № 1, с. 114—127.
6. Jumowski J. Sensitivity of certain dynamis systems with respect to a small delay— Automatica, 1974, **10**, № 6, p. 659—674.
7. Shmidt E. Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen.— Math. Aunal. Bd, 1911, **70**.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
21.01.1981 г.