УДК 517.948

В. Н. Павленко

Существование решений нелинейных уравнений с разрывными полумонотонными операторами

В данной работе устанавливаются предложения о разрешимости уравнений вида

$$Ax + Tx = 0, \tag{1}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной в E областью определения со значениями в сопряженном пространстве E^*, T — нелинейный оператор из E в E^*, E — вещественное рефлексивное банахово пространство. Рассматриваются приложения полученных общих теорем к изучению граничных задач для интегро-дифференциальных уравнений с разрывными слабыми нелинейностями.

1. Основные результаты. Пусть Q — нелинейный оператор, действующий из E в E^*, с областью определения $D(Q)$.

Определение 1. *Элемент $x \in D(Q)$ назовем точкой h-непрерывности оператора Q, если $\forall z \in D(Q)$ $\lim\limits_{t\to 0+} \langle Q(x+tz), z\rangle = \langle Qx, z\rangle$, где $\langle y, x\rangle$ — значение функционала $y \in E^*$ на элементе $x \in E$. В противном случае $x \in D(Q)$ будем называть точкой разрыва оператора Q.*

Определение 2. *Точка разрыва x оператора Q называется регулярной, если существует $z \in D(Q)$ такой, что $\lim\limits_{t\to 0+} \langle Q(x+tz), z\rangle < 0$.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: 1) A — максимальный монотонный оператор;*

2) *оператор $T: E \to E^*$ — полумонотонный* [1], *ограниченный и определенный на всем E, причем, существует $R > 0$ такое, что $\langle Ax + Tx, x\rangle \geqslant 0$, если $x \in D(A)$* и $\|x\| > R$;

3) *точки разрыва оператора $A + T$, принадлежащие $\overline{B(R)} \cap D(A)$ регулярны ($B(R) = \{x \in E \mid \|x\| \subseteq R\}$).*

Тогда уравнение (1) *разрешимо.*

Замечание. Утверждение теоремы 1 сохраняется, если требование полумонотонности оператора T заменить на следующее: оператор $T = F + C$, где F — монотонный оператор, а C — слабо непрерывный на E и $\langle Cx, x\rangle = 0$ для любого $x \in E$.

Рассмотрим граничную задачу

$$\tau u + f(u(x)) - \left|\int\limits_{\omega} K(x, y)\, u(y)\, dy\right| = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \omega. \tag{2}$$

$$\partial_\nu^r(S)\, u(x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leqslant r \leqslant m-1, \tag{3}$$

где $\tau = \sum\limits_{1\leqslant|j|\leqslant 2m} a_j \partial^j$ — формальный дифференциальный оператор четного порядка, определенный в ограниченной области ω и удовлетворяющий неравенству $(-1)^m \sum\limits_{|j|=2m} a_j(x)\, \xi^j \geqslant \alpha |\xi|^{2m}$, $x \in \overline{\omega}$, $\xi \in R^n$, постоянная α положительна и не зависит от x и ξ, функции $a_j(x)$ вещественные и непрерывные в $\bar{\omega}$, а граница S области ω гладкая и не содержит внутренних точек замыкания ω; $\partial_\nu^j(S)$ — производные в направлении внутренней нормали.

Обозначим через V замыкание в метрике $W_q^{2m}(\omega)$ всех функций из $C^{2m}(\omega)$, удовлетворяющих условиям (3). Можно показать, что V совпадает с подпространством функций из $W_q^{2m}(\omega)$, которые вместе со всеми производными до порядка $m-1$ включительно обращаются в нуль на S (в смысле С. Л. Соболева).

Назовем обобщенным решением задачи (2)—(3) функцию $u(x) \in V$, которая почти всюду на ω удовлетворяет уравнению (3).

Теорема 2. *Предположим, что*

1) *функция $f(u)$ — неубывающая и непрерывная справа на R^1 и для любой точки разрыва u_0 этой функции $f(u_0-)<0$, $f(u_0)<0$;*

2) $|f(u)| \leqslant a+b|u|^{p-1}$ $\forall u \in R^1$, *где a и b — положительные константы, $p=q/(q-1)$, причем $1<q\leqslant 2$, если $n-2m\leqslant 0$,* и $2n/(n+2m)\leqslant q\leqslant 2$, если $n-2m>0$;

3) $\int\limits_\omega (\tau u(x))\cdot u(x)\,dx \geqslant c\|u\|^2_{W_2^m(\omega)}$, *если $u(x)\in C^{2m}(\bar{\omega})$ и удовлетворяет условиям*: $\partial^j u(x)=0$, $x\in S$, $0\leqslant |j| \leqslant m-1$ *(c — положительная константа, не зависящая от $u(x)$)*;

4) *интегральный оператор* $C_1 u=\int\limits_\omega K(x, y)\, u(y)\, dy$, *вполне непрерывен из пространства $L_p(\omega)$* в $L_q(\omega)$;

5) $f(u)\,u\geqslant k_1|u|^p-k_2|u|^s-k_3$ $\forall u\in R^1$, *где k_1, k_2, k_3 — положительные числа,* $0<s<p$ и $k_1 \geqslant \|C_1\|$, *если $p=2$.*

Тогда задача (2)—(3) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

2. Вспомогательные предложения. Предложение 1. *Пусть $F: E\to E^*$ — монотонный оператор, определенный на E, а Φ — максимальное монотонное отображение из E в 2^{E^*}, график которого содержит график оператора F. Тогда*

1) *для любых $x\in E$ и $w\in \Phi x$ $\langle w, x\rangle \geqslant \lim\limits_{t\to 0+}\langle Fx_t, x_t\rangle$, где $x_t=(1-t)\,x$;*

2) *если F — ограниченный оператор, то и отображение Φ ограничено.*

Доказательство. 1). Для $x\in E$, $w\in\Phi x$, $x_t=(1-t)\,x$, $0<t<1$, имеем $\langle w-Fx_t, x-x_t\rangle\geqslant 0$. Отсюда следует неравенство $\langle w, x\rangle\geqslant\langle Fx_t, x\rangle$. Переходя к пределу при $t\to 0+$, получаем $\langle w, x\rangle\geqslant \lim\limits_{t\to 0+}\langle Fx_t, x_t\rangle/(1-t) = \lim\limits_{t\to 0+}\langle Fx_t, x_t\rangle$.

2). Предположим, что F — ограниченный оператор и $M>0$. Тогда существует число $K>0$ такое, что $\|Fx\|\leqslant K$, если $\|x\|\leqslant M+1$. Пусть $x\in E$, $\|x\|\leqslant M$, $w\in\Phi x$, а элемент $y\in E$ удовлетворяет условиям: $\|y\|=1$ и $\langle w, y\rangle=\|w\|$. Полагая $x_t=x+ty$, $0<t<1$, получим $\langle w-Fx_t, x-x_t\rangle\geqslant 0$. Из этого неравенства $\langle w, y\rangle\leqslant\langle Fx_t, y\rangle$ и, следовательно, $\|w\|\leqslant\|Fx_t\|\leqslant K$, так как $\|x_t\|\leqslant M+1$. Ограниченность отображения Φ доказана.

Предложение 2. *Предположим, что* 1) *область определения $D(Q)$ оператора $Q: E\to E^*$ — линейное многообразие плотное в E;*

2) *$Q=T+C$, где оператор C — h-непрерывен в точке $x_0\in D(Q)$, причем,*

$$\langle Tx+Cx_0, x-x_0\rangle\geqslant 0 \qquad \forall x\in D(Q); \tag{4}$$

3) *точки разрыва оператора Q, принадлежащие $D(Q)\cap\overline{B(R)}$, $R\geqslant\|x_0\|$, регулярны. Тогда $Qx_0=0$.*

Доказательство. Полагая в (4) $x=x_0+tz$, $t>0$, $z\in D(Q)$, получаем

$$\langle T(x_0+tz)+Cx_0, z\rangle\geqslant 0. \tag{5}$$

Следовательно, $\varliminf\limits_{t\to 0+} \langle T(x_0 + tz) + Cx_0, z\rangle \geqslant 0 \quad \forall z \in D(Q)$. Отсюда следует, что x_0 — точка h-непрерывности оператора Q, так как в противном случае найдется $z \in D(Q)$ такой, что

$$\varliminf_{t\to 0+} \langle Q(x_0 + tz), z\rangle = \varliminf_{t\to 0+} \langle T(x_0 + tz), z\rangle + \langle Cx_0, z\rangle < 0.$$

Из h-непрерывности Q в точке x_0 и (5) имеем $\langle Qx_0, z\rangle \geqslant 0 \ \forall z \in D(Q)$. Последнее возможно лишь при $Qx_0 = 0$, поскольку $D(Q)$ плотное в E множество. Предложение 2 доказано.

Определение [2]. *Отображение Q из E в 2^{E^*} называется псевдомонотонным, если выполняются следующие условия:*

1) *множество Qx непустое, ограниченное, выпуклое и замкнутое в E^* для любого $x \in E$;*

2) *для каждого конечномерного подпространства F из E отображение Q полунепрерывно сверху из F в 2^{E^*} с E^*, наделенном слабой топологией, т. е. для любого $x_0 \in F$ и слабой окрестности V множества Qx_0 в E^* существует окрестность U точки x_0 в F такая, что $Qx \subset V$, если $x \in U$;*

3) *если $x_j \to x$ $(x_j, x \in E)$, $w_j \in Qx_j$ и $\overline{\lim} \langle w_j, x_j - x\rangle \leqslant 0$, то для любого $v \in E$ найдется $w(v) \in Qx$ такой, что $\underline{\lim} \langle w_j, x_j - v\rangle \geqslant \langle w(v), x - v\rangle$.*

Предложение 3. *Пусть $A: E \to E^*$ — линейный максимальный монотонный оператор с плотной в E областью определения $D(A)$; отображение $T: E \to 2^{E^*}$, $D(T) = E$, представляется в виде $T = \Phi + C$, где Φ — максимальное монотонное и ограниченное отображение, а оператор $C: E \to E^*$ — усиленно непрерывный на E. Тогда, если $A + T$ коэрцитивно, то $R(A + T) = E^*$, где $R(A + T) = \bigcup\limits_{x \in D(A)} (Ax + Tx)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $0 \in R(A + T)$, поскольку для любого $w \in E^*$ отображение $Ax + \Phi x + Cx - w$ удовлетворяет всем условиям предложения 3. Обозначим Λ семейство всех конечномерных подпространств из $D(A)$. Пусть $F \in \Lambda$, $j_F: F \to E$ — оператор вложения F в E, $j_F^*: E^* \to F^*$, сопряженный к j_F оператор, $T_F = j_F^*(A + \Phi + C) j_F$. Так как Φ — максимальный монотонный оператор и $D(\Phi) = E$, то отображение Φ — псевдомонотонное [2, предложение 8]. Отсюда следует, что отображение $T_F: F \to 2^{F^*}$ — полунепрерывно сверху и для любого $x \in F$ множество $T_F x$ — непустое, выпуклое, ограниченное и замкнутое в F^*. Отображение $A + \Phi + C$ коэрцитивно, поэтому существует функция $c: R^+ \to R^1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = +\infty$, удовлетворяющая условию $\langle w, x\rangle \geqslant c(\|x\|)\|x\|$, если $x \in D(A)$, а $w \in Ax + {}$ $+ \Phi x + Cx$. Возьмем $x \in F$ и $w_F \in T_F x$. Тогда $w_F = j_F^* w$ для некоторого $w \in Ax + \Phi x + Cx$. Имеем $\langle w_F, x\rangle = \langle j_F^* w, x\rangle = \langle w, x\rangle \geqslant c(\|x\|)\cdot\|x\|$. Следовательно, отображение T_F — коэрцитивно и его функция коэрцитивности та же, что у оператора $A + \Phi + C$. Отображение T_F удовлетворяет условиям предложения 10 из [2], поэтому $0 \in R(T_F)$, и значит, найдутся $x_F \in F$ и $w_F \in \Phi x_F$ такие, что $j_F^* A x_F + j_F^* w_F + j_F^* C x_F = 0$. Отсюда и коэрцитивности T_F получим: $0 = \langle j_F^* A x_F + j_F^* w_F + j_F^* C x_F, x_F\rangle \geqslant c(\|x_F\|)\|x_F\|$. Из этого неравенства следует существование положительного числа R, для которого $\|x_F\| \leqslant R \ \forall F \in \Lambda$. Обозначим V_{F_0} $(F_0 \in \Lambda)$ — слабое замыкание множества $\bigcup\limits_{F\in\Lambda, F\supset F_0} x_F$. Так как замкнутый шар $\overline{B(R)}$ в E слабо компактен, а система слабо замкнутых подмножеств $\{V_{F_0}\}_{F_0\in\Lambda}$ из $\overline{B(R)}$ центрирована, то $\bigcap\limits_{F_0\in\Lambda} V_{F_0}$ непусто [3]. Пусть $x_0 \in \bigcup\limits_{F_0\in\Lambda} V_{F_0}$. Для произвольного $x \in D(A)$ найдется по следовательность подпространств $\{F_i\}$ ($F_i \in \Lambda$, $F_i \subset F_{i+1}$ для любого натурального i) такая, что $x \in F_1$ и последовательность $\{x_i\}$, $x_i = x_{F_i}$ слабо сходится к x_0 [2, предложение 11]. Из монотонности отображения $A + \Phi$ и равенства $j^*_{F_i} A x_i + j^*_{F_i} w_i + j^*_{F_i} (x_i = 0$ $(w_i = w_{F_i})$ для любого $w \in \Phi x$

$$0 \leqslant \langle Ax + w - Ax_i - w_i,\ x - x_i \rangle = \langle Ax + w - Ax_i - w_i,\ j_{F_i}(x - x_i) \rangle =$$
$$= \langle Ax + w + Cx_i,\ x - x_i \rangle.$$

Переходя к пределу при $i \to +\infty$, получаем

$$\langle Ax + w + Cx_0,\ x - x_0 \rangle \geqslant 0, \tag{6}$$

поскольку $Cx_i \to Cx_0$. Так как A—максимальный монотонный оператор, Φ—максимальное монотонное отображение и $0 \in (\operatorname{int} D(\Phi)) \cap D(A)$, то отображение $A + \Phi$ — максимальное монотонное [2, теорема 10]. Отсюда и справедливости (6) для произвольных $x \in D(A)$ и $w \in \Phi x$ следует, что $x_0 \in D(A)$, $-Cx_0 \in Ax_0 + \Phi x_0$. Значит, $0 \in R(A + \Phi + C)$. Предложение 3 доказано.

Замечание. Утверждение предложения 3 сохраняется, если C слабо непрерывный оператор на E и $\langle Cx, x \rangle = 0$ для любого $x \in E$.

Доказательство теоремы 1. Так как оператор T — полумонотонный, ограниченный и $D(T) = E$, то $T = F + C$, где F — монотонный ограниченный оператор, определенный на E, оператор C — усиленно непрерывный из E в E^*. Пусть Φ — максимальное монотонное отображение из E в 2^{E^*}, график которого содержит график F. Поскольку F ограниченный, то отображение Φ ограничено (см. предложение 1). Если $x \in D(A)$, $\|x\| > R$ и $w \in \Phi x$, то из оценки в условии 2) теоремы 1 и предложения 1 получим

$$\langle Ax + w + Cx, x \rangle \geqslant \varliminf_{t \to 0+} \langle Ax_t + Fx_t + Cx_t, x_t \rangle \geqslant 0, \tag{7}$$

где $x_t = (1 - t)x$. Обозначим буквой J нормальное дуальное отображение из E в 2^{E^*}, т. е. $Jx = \{w \in E^* \mid \langle w, x \rangle = \|w\| \|x\|,\ \|w\| = \|x\|\}$.

Известно [4], что J — максимальный монотонный оператор и $D(J) = E$. Для любого натурального n оператор $\Phi + J/n$ — максимальный монотонный [2, теорема 10] и, кроме того, для $x \in D(A)$, $\|x\| > R$, $w \in \Phi x$ и $z \in Jx$ из неравенства (7)

$$\langle Ax + w + z/n + Cx, x \rangle \geqslant \langle z/n, x \rangle = \|x\|^2/n. \tag{8}$$

Так как для отображения $A + (\Phi + J/n) + C$ выполняются все условия предложения 3, существуют $x_n \in D(A)$, $w_n \in \Phi x_n$, $z_n \in Jx_n$ такие, что $Ax_n + w_n + Cx_n + z_n/n = 0$. Из (8) следует, что $\|x_n\| \subseteq R$. Значит, найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к $x_0 \in \overline{B(R)}$. Отображения Φ и C ограниченные, поэтому $\|w_n + Cx_n\| \leqslant M$ для некоторой константы $M > 0$, не зависящей от n. Имеем $\|Ax_n\| = \|-w_n - Cx_n - z_n/n\| \leqslant M + R$ для любого натурального n. Из ограниченности последовательности $\{Ax_n\}$ и замкнутости оператора A следует, что $x_0 \in D(A)$. Точки $\{x, Ax + Fx\}$ $(x \in D(A))$ и $\{x_{n_k}, Ax_{n_k} + w_{n_k}\}$ принадлежат графику монотонного отображения $A + \Phi$ и $Ax_{n_k} + w_{n_k} = -z_{n_k}/n_k - Cx_{n_k}$, следовательно, $\langle Ax + Fx + z_{n_k}/n_k + Cx_{n_k}, x - x_{n_k} \rangle \geqslant 0$. Переходя к пределу при $n_k \to +\infty$, получаем $\langle Ax + Fx + Cx_0, x - x_0 \rangle \geqslant 0$ $\forall x \in D(A)$, поскольку $Cx_{n_k} \to Cx_0$ и $z_{n_k}/n_k \to 0$. Отсюда и предложения 2 заключаем, что $Ax_0 + Fx_0 + Cx_0 = 0$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из теорем вложения [5] и условия 2) теоремы 2 получим, что пространство W_q^{2m} непрерывно вкладывается в L_p. Определим линейный оператор A с плотной в L_p областью определения $D(A) = V$ со значениями в L_q равенством $Au = \tau u$ $\forall u \in V$ и нелинейный оператор F соотношением $F(u) = f(u(x))$ $\forall u \in L_p$. В [6] при доказательстве теоремы 2 было установлено, что F — ограниченный монотонный оператор из L_p в L_q, а оператор A — максимальный монотонный, причем,

$$\langle Au, u\rangle \geqslant k\|u\|^2 \quad \forall u \in D(A) \tag{9}$$

(k — положительная константа, не зависящая от u). Из условия 4) теоремы 2 и неравенства $\int\limits_\omega \| u(x)| - |v(x)\|^q dx \leqslant \int\limits_\omega |u(x) - v(x)|^q dx$ для любых $u(x)$ и $v(x)$ из $L_q(\omega)$ заключаем, что оператор $Cu = -\left|\int\limits_\omega K(x,y)\,u(y)\,dy\right|$ — усиленно непрерывный из L_p в L_q. Из условия 5) теоремы 2 для произвольной функции $u(x) \in L_p$

$$\langle Fu, u\rangle = \int\limits_\omega f(u(x))\,u(x)\,dx \geqslant k_1 \int\limits_\omega |u(x)|^p dx - k_2 \int\limits_\omega |u(x)|^s dx - k_3 \operatorname{mes}\omega \geqslant$$

$$\geqslant k_1\|u\|^p - k_2(\operatorname{mes}\omega)^{1-s/p}\|u\|^s - k_3\operatorname{mes}\omega,$$

что совместно с равенством $\|Cu\| = \|C_1 u\|$ ($\forall u \in L_p$) дает: $\langle Au + Fu + Cu, u\rangle \geqslant k\|u\|^2 + k_1\|u\|^p - k_2(\operatorname{mes}\omega)^{1-s/p}\|u\|^s - k_3\operatorname{mes}\omega - \|C_1\|\,\|u\|^2$ $\forall u \in D(A)$. Из этого неравенства следует существование константы $R > 0$ такой, что $\langle Au + Fu + Cu, u\rangle \geqslant 0$, если $u \in D(A)$ и $\|u\| > R$, так как по условию $0 < s < p$ и либо $p > 2$, $k_1 > 0$, либо $p = 2$ и $k_1 \geqslant \|C_1\|$. Регулярность точек разрыва оператора $A + F + C$ устанавливается аналогично доказательству регулярности точек разрыва оператора $T = F + V$ в теореме 2 из [7]. Появляющийся при этом дополнительный член $\int\limits_\omega (Cu)\,h_\varepsilon(x)\,dx \leqslant 0$. Таким образом, для оператора $A + T$, $T = F + C$, выполняются все условия теоремы 1. Поэтому задача (2) — (3) имеет по крайней мере одно обобщенное решение. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 2 сохраняется, если условие 5) теоремы 2 заменить следующим: $\|C_1\| < k$, где k — постоянная в неравенстве (9). Действительно, если A, F и C те же, что в доказательстве теоремы 2, то для любого $u \in D(A)$
$\langle Au + Fu + Cu, u\rangle \geqslant (k_1 - \|C_1\|)\|u\|^2 - \|F(0)\|\,\|u\|$, поскольку $\langle Fu, u\rangle = \langle Fu - F(0), u\rangle + \langle F(0), u\rangle \geqslant \langle F(0), u\rangle \geqslant -\|F(0)\|\,\|u\|$, $\langle Au, u\rangle \geqslant k\|u\|^2$ и $\langle Cu, u\rangle \geqslant -\|Cu\|\,\|u\| = -\|C_1 u\|\,\|u\| \geqslant -\|C_1\|\,\|u\|^2$. Так как $k > \|C_1\|$, то найдется число $R > 0$ такое, что

$$\langle Au + Fu + Cu, u\rangle \geqslant 0 \tag{10}$$

если $u \in D(A)$ и $\|u\| > R$. Отсюда следует справедливость замечания, поскольку условие 5) теоремы 2 использовано при доказательстве этой теоремы лишь для получения оценки (10).

1. В а й н б е р г М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
2. B r o w d e r F. H e s s P. Nonlinear mappings of monotone type Banach spaces.— J. Funct. Anall., 1972, 11, N 3, p. 251—294.
3. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
4. B r o w d e r F. Nonlinear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces.— Math. Ann., 1969, 183, p. 213—231.
5. С о б о л е в С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. 256 с.
6. П а в л е н к о В. Н. Нелинейные уравнения с разрывными операторами в банаховых пространствах.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 5, с. 569—572.
7. П а в л е н к о В. Н. Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами.— Вест. Моск. ун-та, Мат., мех, 1973, № 6, с. 21—29.

Челябинский
политехнический институт

Поступила в редакцию
15.X 1979 г.