УДК 519.21

В. Н. Супрун, В. М. Шуренков

О предельном распределении положения в момент выхода из интервала сложного пуассоновского процесса с нулевым средним и бесконечной дисперсией

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$ — сложный пуассоновский процесс с положительным сносом, отрицательными скачками и нулевым средним, т. е.

$$Me^{s\xi(t)} = \exp[tk(s)] = \exp\left\{t\int_{-\infty}^{0}[e^{sx}-1-sx]\,\Pi(dx)\right\}, \tag{1}$$

где $s \geqslant 0$, а мера Π такова, что $\int\limits_{-\infty}^{0}\Pi(-\infty, x)\,dx < \infty$.

Тогда $k''(0) = \sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} y^2\Pi(dy)$ — дисперсия приращения процесса $\xi(t)$. И пусть ζ — момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из интервала $(0, \infty)$, т. е. $\zeta = \inf\{t : \xi(t) \leqslant 0\}$, а $\xi^T = \inf\{t : \xi(t) \notin (0, T)\}$ — момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из интервала $(0, T)$, $T > 0$.

Целью работы является дальнейшее изучение предельного распределения случайных величин $\xi(\zeta)$ и $\xi(\zeta^T)$. В [2] показано, что если $\sigma^2 = \infty$ и

$$k(s) = s^{\alpha}L\left(\frac{1}{s}\right), \tag{2}$$

где $1 < \alpha < 2$, L — медленно меняющаяся функция, то

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} \to A\left\{\frac{|z|}{1-\alpha} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha}}\,dt\right\} \text{ при } x \to \infty$$

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta^T)}{x} < z\right\} \to A\left\{\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha}}\,dt - \int^{1/\beta} \frac{(1-\beta t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha}}\,dt\right\},$$

при $x \to \infty$, $T \to \infty$, $\dfrac{x}{T} \to \beta$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $(z < 0$, $A = (\alpha - 1)\pi^{-1}\sin\pi\alpha$, P_x — условная вероятность при условии $\xi(0) = x)$.

В случае $\alpha = 2$ дисперсия приращения процесса $\xi(t)$ может быть как конечной, так и бесконечной. На основании результатов Эриксона [4] можно предположить, что при условии $\Pi(-\infty, -x) \sim |x|^{-2}L(x)$ существует некоторая нелинейная нормировка $\beta(x)$ такая, что предельные распределения

$$P_x\left\{\frac{\beta[\xi(\zeta)]}{\beta(x)} < z\right\} \text{ и } P_x\left[\frac{\beta[\xi(\zeta^T)]}{\beta(x)} < z\right\}$$

будут нетривиальными.

Эту ситуацию мы и будем рассматривать, используя при этом идеи работы [4]. Сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1. *Пусть неубывающая непрерывная при $x > 0$ функция $R(x)$ определена уравнением*

$$\int^{\infty} e^{-sx}R(x)\,dx = \frac{1}{k(s)}, \quad s > 0. \tag{3}$$

Тогда при $x > 0$, $z < 0$

$$P_x\{\xi(s) < z\} = R(x)\int_0^\infty \Pi(-\infty, z-y)\,dy - \int_0^x R(x-y)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy \quad (4)$$

$$P_x\{\xi(\zeta^T) < z\} = \frac{R(x)}{R(T)}\int_0^T R(T-y)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy - \int_0^x R(x-y)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy \quad (5)$$

и, если имеет место (2), *то при* $x \to \infty$

$$\Pi(-\infty, -x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}|x|^{-\alpha}L(x) \quad (6)$$

$$R(x) \sim \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}x^{\alpha-1}L^{-1}(x). \quad (7)$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство формул (4), (5) можно найти в работе [5], а (6), (7) в [2].

Далее, из представления (1) для кумулянты $k(s)$ процесса $\xi(t)$ получаем с учетом $k'(0) = 0$ равенство

$$\frac{s}{k(s)} = \frac{1}{\int_0^\infty \Pi(-\infty, -y)\,dy - \int_0^\infty e^{-sy}\Pi(-\infty, -y)\,dy}, \quad (8)$$

и поскольку $\int_0^\infty \Pi(-\infty, -y)\,dy < \infty$, то преобразуем это равенство к виду

$$\frac{s}{k(s)} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{1 - \int_0^\infty e^{-sy}\frac{1}{c}\Pi(-\infty, -y)\,dy} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{1-\psi(s)}, \quad (9)$$

где $c = \int_0^\infty \Pi(-\infty, -y)\,dy$, $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\frac{1}{c}\Pi(-\infty, -y)\,dy$.

Очевидно, что $\psi(0) = 1$, $\psi(s) < 1$ при $s > 0$. Обращая (9) по s, получаем

$$R(x) = \frac{1}{c}U(x), \quad (10)$$

где $U(x)$ — функция восстановления, соответствующая распределению $F(x) = 1/c\int_0^x \Pi(-\infty, -y)\,dy$, т. е. $U(x) = \sum_{n=0}^\infty F^{n*}(x)$. Здесь знак «$n*$» означает свертку n-кратную распределения F с собой. Таким образом $R(x)$ с точностью до множителя $1/c$ также является функцией восстановления.

Введем функцию $\beta(x)$, $x \geqslant 0$

$$\beta(x) = \int_0^x \left[1 - \int_0^t \Pi(-\infty, -y)\,dy\right]dt = \int_0^x dt\int_t^\infty \Pi(-\infty, -y)\,dy \quad (11)$$

и обозначим через $l(x)$ строго возрастающую, непрерывную и обратную к $\beta(x)$ функцию, т. е. $l[\beta(x)] = \beta[l(x)] = x$. Поскольку $\beta(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то функция $l(x)$ определена на $(0, \infty)$. Положим

$$z_x = l[-z\beta(x)]. \quad (12)$$

Следуя [4], можно записать, что если $x \to \infty$, то

$$R(x) - R(x-y) \sim \frac{y}{\beta(x)} \tag{13}$$

и

$$R(x) \sim \frac{x}{\beta(x)}. \tag{14}$$

Кроме того, в [4] доказано следующее утверждение. Если z_x определено по (12) с $0 < z < 1$, то

$$\frac{z_x}{x} \to 0, \quad z_x \to \infty \text{ при } x \to \infty, \tag{15}$$

и можно указать такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $T > 0$, что

$$\frac{1-\varepsilon}{\beta(x)}\delta < R(x+\delta) - R(x) < \frac{1+\varepsilon}{\beta(x)}\delta \tag{16}$$

для всех $t \geqslant T$ и $\frac{1}{2}t \leqslant x \leqslant 2t$.

Теорема 1. *Пусть* $k'(0) = 0$ *и* $\Pi(-\infty, -x) = |x|^{-2}L(x)$, *где* $x > 0$ *и* L *медленно меняется на бесконечности. Тогда, если* $x \to \infty$, $T \to \infty$, $x/T \to q \in (0, 1)$, *то*

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} \sim \frac{L(x)}{\beta(x)} \log\left|\frac{z-1}{z}\right|, \tag{17}$$

и

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta^T)}{x} < z\right\} \sim \frac{L(x)}{\beta(x)} \log\left|\frac{(z-1)}{z}\left(\frac{zq}{zq-1}\right)^q\right|, \tag{18}$$

где $z < 0$.

Доказательство. Установим сначала справедливость формулы (17). Учитывая лемму 1, записываем соотношение (4) в виде

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} = \int_0^x [R(x) - R(x-y)]\, \Pi(-\infty, zx-y)\, dy + $$
$$+ \int_x^\infty R(x)\, \Pi(-\infty, zx-y)\, dy. \tag{19}$$

Принимая во внимание (13), (14), получаем

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} \frac{\beta(x)}{L(x)} \sim \int_0^x \frac{yL(zx-y)}{(zx-y)^2 L(x)}\, dy + \int_x^\infty \frac{xL(zx-y)}{(zx-y)^2 L(x)}\, dy.$$

Введем в этих интегралах подстановку $y = tx$. После очевидных преобразований это соотношение перепишется в виде

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} \frac{\beta(x)}{L(x)} \sim \int_0^1 \frac{tL[(z-t)x]}{(z-t)^2 L(x)}\, dt + \int_1^\infty \frac{L[(z-t)x]}{(z-t)^2 L(x)}\, dt.$$

Переходя в этом выражении к пределу при $x \to \infty$ и воспользовавшись свойствами медленно меняющихся функций [3] получаем

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} \frac{\beta(x)}{L(x)} \to \int_0^1 \frac{tdt}{(z-t)^2} + \int_1^\infty \frac{dt}{(z-t)^2} = \ln\left|\frac{z-1}{z}\right|,$$

что и требовалось доказать.

Формула (18) получается применением аналогичных рассуждений к (5).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда*

$$P_x\left\{\frac{\beta[\xi(\zeta)]}{\beta(x)}<z\right\}\to -z \tag{20}$$

и

$$P_x\left\{\frac{\beta[\xi(\zeta^T)]}{\beta(x)}<z\right\}\to q(z-1)-z \tag{21}$$

при $x\to\infty$, $T\to\infty$, $x/T\to q$, $q\in[0,1]$, $z\in(-1,0)$.

Доказательство. Для удобства выкладок рассмотрим выражение

$$P_x\left\{\frac{\beta[-\xi(\zeta)]}{\beta(x)}>z\right\}.$$

Положим $\beta^{-1}[-z\beta(x)]=l[-z\beta(x)]$. Тогда

$$P_x\left\{\frac{\beta[-\xi(\zeta)]}{\beta(x)}>z\right\}=P_x\{-\xi(\zeta)>l[z\beta(x)]\}=P_x\{-\xi(\zeta)>z_x\}.$$

Докажем (20). С этой целью преобразуем (4) к виду

$$P_x\{-\xi(\zeta)>z_x\}=\int\limits_0^x[R(x)-R(x-y)]\,\Pi(-\infty,zx+y)\,dy+$$

$$+\int\limits_x^\infty R(x)\,\Pi(-\infty,z_x+y)\,dy. \tag{22}$$

После несложных выкладок получим

$$P_x\{-\xi(\zeta)>z_x\}=\int\limits_0^x\int\limits_{x-y}^x dR(t)\,\Pi(-\infty,z_x+y)\,dy+\int\limits_0^x dR(t)\times$$

$$\times\int\limits_x^\infty\Pi(-\infty,z_x+y)\,dy.$$

Изменяя в первом слагаемом порядок интегрирования и вводя в обоих интегралах подстановку $z_x+y=v$, получаем

$$P_x\{-\xi(\zeta)>z_x\}=\int\limits_0^x dR(t)\int\limits_{z_x+x-t}^{z_x+x}\Pi(-\infty,v)\,dv+\int\limits_0^x dR(t)\times$$

$$\times\int\limits_{z_x+x}^\infty\Pi(-\infty,v)\,dv=\int\limits_0^x dR(t)\int\limits_{z_x+x-t}^\infty\Pi(-\infty,v)\,dv.$$

Тогда, следуя [4], можно показать, что

$$P_x\{-\xi(\zeta)>z_x\}\gtrless\frac{1\mp\varepsilon}{\beta(x)}\int\limits_0^x\int\limits_{z_x+x-t}^\infty\Pi(-\infty,v)\,dv\,dt\pm\frac{4\delta}{\beta(x)}. \tag{23}$$

Но из (11) следует

$$\int\limits_0^x\int\limits_{z_x+x-t}^\infty\Pi(-\infty,v)\,dv\,dt=\beta(z_x+x)-\beta(z_x). \tag{24}$$

Подставим (24) в (23) и перейдем к пределу при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} P_x\{-\xi(\zeta)>z_x\}=(1\mp\varepsilon)\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\beta(z_x+x)-\beta(z_x)}{\beta(x)}\right]\pm\lim_{x\to\infty}\frac{4\delta}{\beta(x)}.$$

Из (12) и того, что $\beta(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\beta(z_x)}{\beta(x)}=z, \text{ а } \lim_{x\to\infty}\frac{4\delta}{\beta(x)}=0.$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\beta(z_x+x)}{\beta(x)}=\max(1,z). \tag{25}$$

Пусть $c=\max(1,z)$ и $c_x=l[c\beta(x)]$. Тогда $c\beta(x)\leqslant\beta(c_x)\leqslant\beta(z_x+x)\leqslant\leqslant\beta(2c_x)$, или

$$c\leqslant\frac{\beta(z_x+x)}{\beta(x)}\leqslant\frac{\beta(2c_x)}{\beta(x)}.$$

Из того, что β — медленно меняющаяся функция и $c_x\to\infty$ при $x\to\infty$ (15) следует $\frac{\beta(2c_x)}{\beta(x)}\to 1$ при $x\to\infty$. Таким образом, $c\leqslant\frac{\beta(z_x+x)}{\beta(x)}\leqslant 1$, и (25) доказано. Отсюда, учитывая, что

$$\max(a,b)-b=\begin{cases}a-b, & \text{если } a>b,\\ 0, & \text{если } a<b,\end{cases}$$

получаем $P_x\{-\xi(\zeta)>z_x\}\to\max(1,z)-z=1-z$, или, в условиях теоремы, $P_x\{\xi(\zeta)<z_x\}\to -z$ при $x\to\infty$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь справедливость формулы (21). Для этого преобразуем (5) к виду

$$P_x\{-\xi(\zeta^T)>z_x\}=-\frac{R(x)}{R(T)}\left\{\int_0^T[R(T)-R(T-y)]\,\Pi(-\infty,z_x+y)dy\right\}+$$

$$+\int_0^x[R(x)-R(x-y)]\,\Pi(-\infty,z_x+y)\,dy+R(x)\int_x^\infty\Pi(-\infty,z_x+y)\,dy-$$

$$-\frac{R(x)}{R(T)}\int_T^\infty\Pi(-\infty,z_x+y)\,dy=\int_0^x dR(t)\int_{x+z_x-t}^\infty\Pi(-\infty,v)\,dv-$$

$$-\frac{R(x)}{R(T)}\int_0^T dR(t)\int_{T+z_x-t}^\infty\Pi(-\infty,v)\,dv.$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве (20), получаем

$$P_x\{-\xi(\zeta^T)>z_x\}\gtrless\frac{1\mp\varepsilon}{\beta(x)}\Big\{[\beta(x+z_x)-\beta(z_x)]-$$

$$-\frac{R(x)}{R(T)}[\beta(T+z_x)-\beta(z_x)]\Big\}\pm\frac{4\delta}{\beta(x)}. \tag{26}$$

Устремляя в (26) $x\to\infty$, $T\to\infty$ и учитывая, что $\frac{x}{T}\to q$, $q\in(0,1)$ и

$\frac{R(x)}{R(T)} \to q$, имеем $P_x\{-\xi(\zeta^T) > z_x\} \to 1 - z - q(1 - z) = 1 - [z + \beta(1 - z)]$. Отсюда в условиях теоремы находим $P_x\{\xi(\zeta^T) < z_x\} \to q(z - 1) - z$. Теорема доказана.

1. Супрун В. Н. О величине первого перескока через нулевой уровень для однородного процесса с независимыми приращениями и скачками одного знака.— Докл. АН УССР, 1976, № 4, с. 317—320.
2. Супрун В. Н., Шуренков В. М. Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с нулевым средним и бесконечной дисперсией.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 2, с. 262 — 264.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, т. 2, 1967. 752 с.
4. Erickson K. B. Strong Renewal Theorems with infinite mean, — Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **151**, 1.
5. Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М. Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, **21**, вып. 2, с. 253—259.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
16.XI 1979 г.