УДК 519.152

Г. И. Фалин

Нестационарный режим функционирования одноканальной системы с групповым поступлением требований при наличии повторных вызовов

1. Постановка задачи. Обычно рассматривают два типа систем массового обслуживания в зависимости от судьбы требования, получившего отказ в немедленном обслуживании (или, как будем говорить, задержанного требования): системы с потерями и системы с ожиданием.

Встречающиеся на практике системы часто не могут быть адекватно описаны ни одной из таких моделей. Наиболее важный пример систем такого рода — телефонные системы автоматической коммутации. Для их анализа был введен и в последнее время интенсивно изучается новый класс систем массового обслуживания — системы с повторными вызовами. Этот класс систем характеризуется таким основным предположением: задержанный вызов покидает зону обслуживания и через некоторое время T повторяет попытку получить обслуживание.

Если $T = 0$, получим систему с ожиданием; если $T = \infty$, то система с повторными вызовами перейдет в соответствующую систему с потерями. Так что системы с повторными вызовами, занимая промежуточное место между системами с потерями и системами с ожиданием, кроме большого практического значения представляют и теоретический интерес.

В настоящей работе изучим соответствующее обобщение классической модели Гейвера группового поступления требований в одноканальную систему с ожиданием [1].

Именно, рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания, в которую поступает стационарный поток без последействия. Как показано в [2], такой поток может быть описан следующей схемой (групповое поступление требований): моменты поступления заявок образуют пуассоновский поток с некоторой интенсивностью λ; в каждый момент поступления с определенной вероятностью c_k поступает точно k требований.

Пусть в систему поступила группа из k вызовов. Если канал свободен, одна заявка начинает обслуживаться, а остальные образуют $k-1$ источник повторных вызовов. Если же канал занят, число источников увеличивается на k.

Каждый источник посылает пуассоновский поток повторных вызовов с интенсивностью μ. Если при поступлении повторного вызова канал свободен, то этот вызов немедленно начинает обслуживаться, а число источников уменьшается на единицу. Если канал занят, то состояние системы не меняется.

Длительность обслуживания — произвольная неотрицательная случайная величина с функцией распределения $B(x)$. Пусть $\beta(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dB(x)$ — ее преобразование Лапласа — Стильтьеса, $\rho = \lambda \int\limits_0^\infty x dB(x) \cdot \sum\limits_{n=1}^\infty n c_n$ — загрузка системы первичными требованиями, $b(x) = B'(x)/[1 - B(x)]$ — мгновенная интенсивность обслуживания, $c(z) = \sum\limits_{n=1}^\infty z^n c_n$.

В стационарном режиме описанная система массового обслуживания изучалась в работе [3]. В настоящей статье рассмотрим нестационарный режим и изучим связанные с этим вопросы: период занятости, существование установившегося режима и т. д.

Пусть $N(t)$ — число источников в системе в момент t, $C(t)$ — число обслуживаемых вызовов в момент t; если $C(t) = 1$, то $\xi(t)$ — время, в течение которого обслуживается вызов.

2. Процесс обслуживания на периоде занятости.

Определение. k-периодом занятости называется промежуток времени, начинающийся с момента поступления группы из k вызовов в свободную от источников систему при незанятом канале и оканчивающийся в момент окончания обслуживания того вызова, когда в системе впервые не окажется источников.

Таким образом определенный период занятости состоит из чередующихся промежутков обслуживания требований и интервалов времени, когда канал свободен, но в системе имеются источники повторных вызовов. Следовательно, в отличие от систем с ожиданием период занятости в нашем случае — это не «период занятости обслуживающего прибора», а «период занятости системы источниками».

Пусть в момент $t = 0$ начался k-период занятости. Обозначим: $L^{(k)}$ — его длительность, $\Pi^{(k)}(t) = P\{L^{(k)} < t\}$, $\pi^{(k)}(s) = M e^{-sL^{(k)}}$.

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение (см. [1]). Пусть $\pi_\infty(s)$ преобразование Лапласа длительности 1-периода занятости соответствующей системы с ожиданием (модель Гейвера). Тогда а) $\pi_\infty(s)$ — решение уравнения $\beta(s + \lambda - \lambda c(z)) - z = 0$. Других корней на отрезке $0 \leqslant z \leqslant \pi_\infty(s)$ это уравнение не имеет; б) если $\rho > 1$, то $\pi_\infty(0) < 1$; если $\rho \leqslant 1$, то $\pi_\infty(0) = 1$; в) если $\rho \leqslant 1$, то $\pi'_\infty(0) = \beta'(0)/(1-\rho)$.

Нас интересует совместное распределение состояния канала и числа источников внутри периода занятости, т. е. вероятности $p_{0n}^{(k)}(t) = P\{L^{(k)} > t, C(t) = 0, N(t) = n\}$, $n \geqslant 1$; $p_{1n}^{(k)}(t, x)\,dx = P\{L^{(k)} > t, C(t) = 1, x < \xi(t) < x + dx, N(t) = n\}$, $n \geqslant 0$, задаваемые производящими функциями преобразований Лапласа

$$\varphi_0^{(k)}(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^\infty e^{-st} p_{0n}^{(k)}(t)\,dt, \quad \varphi_1^{(k)}(s, z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^\infty e^{-st} p_{1n}^{(k)}(t, x)\,dt.$$

Теорема 1.

$$\varphi_0^{(k)}(s, z) = e(s, z) \int_0^z \frac{\pi^{(k)}(s) - u^{k-1}\beta(s + \lambda - \lambda c(u))}{\mu[\beta(s + \lambda - \lambda c(u)) - u]\, e(s, u)}\,du, \quad 0 \leqslant z < \pi_\infty(s), \quad (1)$$

$$\varphi_1^{(k)}(s, z, x) = \frac{(s + \lambda - \lambda c(z))\,\varphi_0^{(k)}(s, z) + \pi^{(k)}(s) - z^k}{\beta(s + \lambda - \lambda c(z)) - z}[1 - B(x)]\, e^{-(s+\lambda-\lambda c(z))x}. \quad (2)$$

Здесь

$$e(s, z) = \exp\left\{\frac{1}{\mu}\int_0^z \frac{s + \lambda - \lambda\dfrac{c(u)}{u}\beta(s + \lambda - \lambda c(u))}{\beta(s + \lambda - \lambda c(u)) - u}\,du\right\}, \quad 0 \leqslant z < \pi_\infty(s). \quad (3)$$

Доказательство. Обычными рассуждениями [4] получим дифференциально-разностные уравнения для $p_{0n}^{(k)}(t)$ и $p_{1n}^{(k)}(t, x)$:

$$\frac{\partial p_{0n}^{(k)}(t)}{\partial t} = -(\lambda + n\mu)\, p_{0n}^{(k)}(t) + \int_0^\infty p_{1n}^{(k)}(t, x)\, b(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial p_{1n}^{(k)}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial p_{1n}^{(k)}(t, x)}{\partial x} = -(\lambda + b(x))\, p_{1n}^{(k)}(t, x) +$$

$$+\lambda(1-\delta_{n,0})\sum_{m=1}^{n} c_m p_{1n-m}^{(k)}(t, x),$$

$$p_{1n}^{(k)}(t, 0)=\lambda(1-\delta_{n,0})\sum_{m=1}^{n+1} c_m p_{0n-m+1}^{(k)}(t)+\mu(n+1)\,p_{0n+1}^{(k)}(t),$$

$$\frac{d\Pi^{(k)}(t)}{dt}=\int_0^\infty p_{10}^{(k)}(t, x)\,b(x)\,dx.$$

Начальные условия имеют вид $p_{0n}^{(k)}(0)=0$, $p_{1n}^{(k)}(0, x)=\delta(x)\,\delta_{n,k-1}$. Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Этим уравнениям соответствуют уравнения для $\varphi_0^{(k)}(s, z)$ и $\varphi_1^{(k)}(s, z, x)$:

$$(s+\lambda)\,\varphi_0^{(k)}(s, z)+\mu z\frac{\partial\varphi_0^{(k)}(s, z)}{\partial z}=\int_0^\infty \varphi_1^{(k)}(s, z, x)\,b(x)\,dx-\pi^{(k)}(s), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\varphi_1^{(k)}(s, z, x)}{\partial x}=-(s+\lambda-\lambda c(z)+b(x))\,\varphi_1^{(k)}(s, z, x)+\delta(x)\,z^{k-1}, \qquad (5)$$

$$\varphi_1^{(k)}(s, z, 0)=\lambda\frac{c(z)}{z}\varphi_0^{(k)}(s, z)+\mu\frac{\partial\varphi_0^{(k)}(s, z)}{\partial z}. \qquad (6)$$

Решение (5) имеет вид

$$\varphi_1^{(k)}(s, z, x)=[z^{k-1}+\varphi_1^{(k)}(s, z, 0)]\,[1-B(x)]\,e^{-(s+\lambda-\lambda c(z))x}. \qquad (7)$$

Подставляя это выражение в (4) и (6) и исключая $\varphi_1^{(k)}(s, z, 0)$, получаем дифференциальное уравнение относительно $\varphi_0^{(k)}(s, z)$:

$$\mu[\beta(s+\lambda-\lambda c(z))-z]\frac{\partial\varphi_0^{(k)}(s, z)}{\partial z}=\left[s+\lambda-\lambda\frac{c(z)}{z}\beta(s+\lambda-\lambda c(z))\right]\times$$
$$\times\,\varphi_0^{(k)}(s, z)+\pi^{(k)}(s)-z^{k-1}\beta(s+\lambda-\lambda c(z)). \qquad (8)$$

Если $0\leqslant z<\pi_\infty(s)$, то коэффициент при производной в левой части (8) отличен от нуля, и поэтому решение (8) дается формулой (1).

Для получения (2) достаточно заменить в правой части (6) $\dfrac{\partial\varphi_0^{(k)}(s, z)}{\partial z}$ его выражением из (8) и полученное соотношение подставить в (7).

В формулах (1), (2) осталось неопределенным преобразование Лапласа длительности k-периода занятости $\pi^{(k)}(s)$. Для его нахождения проведем следующие рассуждения.

Из (3) следует, что если $s>0$, то при $z\to\pi_\infty(s)-0$ $e(s, z)\to+\infty$. С другой стороны, при $s>0$ $\varphi_0^{(k)}(s, \pi_\infty(s))<+\infty$. Поэтому если $s>0$, то при $z\to\pi_\infty(s)-0$ интеграл в правой части (1) должен стремиться к нулю, т. е.

$$\pi^{(k)}(s)=\frac{\displaystyle\int_0^{\pi_\infty(s)}\frac{u^{k-1}\beta(s+\lambda-\lambda c(u))}{[\beta(s+\lambda-\lambda c(u))-u]\,e(s, u)}\,du}{\displaystyle\int_0^{\pi_\infty(s)}\frac{1}{[\beta(s+\lambda-\lambda c(u))-u]\,e(s, u)}\,du},\quad s>0. \qquad (9)$$

Отметим, что оба интеграла в правой части понимаются, вообще говоря, в несобственном смысле. Единственная особая точка — правый конец промежутка интегрирования $\pi_\infty(s)$, вблизи которой подынтегральные функции неограничены.

Если в определении k-периода занятости не учитывать размер группы требований, с поступления которой он начинается, то придем к понятию периода занятости. Пусть L — длительность периода занятости, $\pi(s) = Me^{-sL}$. Нетрудно видеть, что $\pi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \pi^{(k)}(s)$, и из формулы (9) после несложных преобразований следует, что

$$s + \lambda - \lambda\pi(s) = \frac{\mu}{\int\limits_0^{\pi_\infty(s)} \frac{1}{[\beta(s+\lambda-\lambda c(u)) - u]\, e(s, u)}\, du}, \quad s > 0. \quad (10)$$

Из этого соотношения и отмеченных ранее свойств функции $\pi_\infty(s)$ непосредственно следует теорема.

Теорема 2. А) *Если $\rho > 1$, то существует положительная вероятность того, что период занятости никогда не окончится;*

б) *если $\rho = 1$, то период занятости конечен почти наверное, но имеет бесконечную среднюю длительность;*

в) *если $\rho < 1$, то период занятости не тольдо конечен почти наверное, но и имеет конечную среднюю длительность:*

$$ML = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(1-\rho)} \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \int\limits_0^1 \frac{1 - \frac{c(u)}{u}\beta(\lambda - \lambda c(u))}{\beta(\lambda - \lambda c(u)) - u}\, du\right\} < +\infty.$$

Если $p_{0n}(t) = P\{L > t,\ C(t) = 0,\ N(t) = n\}$, $n \geqslant 1$; $p_{1n}(t, x)\,dx = P\{L > t,\ C(t) = 1,\ x < \xi(t) < x + dx,\ N(t) = n\}$, $n \geqslant 0$, то

$$p_{0n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_{0n}^{(k)}(t), \quad p_{1n}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_{1n}^{(k)}(t, x),$$

и для производящих функций преобразований Лапласа

$$\varphi_0(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int\limits_0^{\infty} e^{-st} p_{0n}(t)\, dt, \quad \varphi_1(s, z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_0^{\infty} e^{-st} p_{1n}(t, x)\, dt$$

из теоремы 1 следует такая теорема.

Теорема 3.

$$\varphi_0(s, z) = e(s, z) \int\limits_0^z \frac{\pi(s) - \frac{c(u)}{u}\beta(s + \lambda - \lambda c(u))}{\mu\,[\beta(s+\lambda-\lambda c(u)) - u]\, e(s, u)}\, du, \quad 0 \leqslant z < \pi_\infty(s),$$

$$\varphi_1(s, z, x) = \frac{(s + \lambda - \lambda c(z))\,\varphi_0(s, z) + \pi(s) - c(z)}{\beta(s + \lambda - \lambda c(z)) - z}[1 - B(x)]\, e^{-(s+\lambda-\lambda c(z))x}.$$

Здесь $e(s, z)$ и $\pi(s)$ даются формулами (3) и (10) соответственно.

3. Исходный процесс. Пусть

$$P_{0n}(t)=P\{C(t)=0,\ N(t)=n\},\ P_{1n}(t,x)\,dx=P\{C(t)=1,\ x<\xi(t)<x+$$
$$+dx,\ N(t)=n\},\quad \Phi_0(s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int_0^{\infty}e^{-st}P_{0n}(t)\,dt,$$
$$\Phi_1(s,z,x)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int_0^{\infty}e^{-st}P_{1n}(t,x)\,dt.$$

Для определенности предположим, что в начальный момент канал свободен и нет источников повторных вызовов. Обычные рассуждения доказывают справедливость равенств

$$\Phi_0(s,z)=\frac{1+\lambda\varphi_0(s,z)}{s+\lambda-\lambda\pi(s)},\quad \Phi_1(s,z,x)=\frac{\lambda\varphi_1(s,z,x)}{s+\lambda-\lambda\pi(s)},$$

и из теоремы 3 и равенства (10) после несложных преобразований получим основную теорему.

Теорема 4.

$$\Phi_0(s,z)=\frac{1}{\mu}\int_z^{\pi_\infty(s)}\frac{1}{\beta(s+\lambda-\lambda c(u)-u}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{\mu}\int_u^z\frac{s+\lambda-\lambda\dfrac{c(v)}{v}\beta(s+\lambda-\lambda c(v))}{\beta(s+\lambda-\lambda c(v))-v}\,dv\right\}du,\quad 0\leqslant z<\pi_\infty(s),$$
$$\Phi_1(s,z,x)=\frac{(s+\lambda-\lambda c(z))\,\Phi_0(s,z)-1}{\beta(s+\lambda-\lambda c(z))-z}[1-B(x)]e^{-(s+\lambda-\lambda c(z))x}.$$

Из теорем 2 и 4 непосредственно следует такая теорема.

Теорема 5. *Установившийся режим существует тогда и только тогда, когда $\rho<1$. Стационарное распределение состояния канала и числа источников в этом случае дается формулами*

$$\Phi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^nP_{0n}(t)=(1-\rho)\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\int_1^z\frac{1-\dfrac{c(u)}{u}\beta(\lambda-\lambda c(u))}{\beta(\lambda-\lambda c(u))-u}\,du\right\},$$
$$\Phi_1(z,x)=\sum_{n=0}^{\infty}z^nP_{1n}(t,x)=\lambda\frac{1-c(z)}{\beta(\lambda-\lambda c(z))-z}\Phi_0(z)[1-B(x)]e^{-(\lambda-\lambda c(z))x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaver D. P. Imbedded Markov chain analysis of a waiting line process in continuous time.— Annals of Mathematical Statistics, 1959, **30**, N 3, p. 698—720.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.— М.: Наука, 1966.— 431 с.
3. Фалин Г. И. Групповое поступление требований в одноканальную систему с повторными вызовами.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 4, с. 561—565.
4. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами.— М.: Мир, 1973.— 279 с.

Московский
государственный университет

Поступила в редакцию 9.X 1976 г.;
после переработки — 26.II 1979 г.