УДК 519.21

А. М. Фаль

Некоторые предельные теоремы для простейшего марковского случайного блуждания

1. Рассмотрим простейшее марковское случайное блуждание

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,\ n \geqslant 1,\ S_0 = 0,$$

у которого

$$P\{\xi_t = 1/S_{t-1} = k\} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{k+\alpha}\right), \tag{1}$$

$$P\{\xi_t = -1/S_{t-1} = k\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{k+\alpha}\right),$$

$$|\alpha| < \frac{1}{2},\ t = 1, 2, \ldots,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть $P_{2j}^{2n} = P\{S_{2n} = 2j/S_0 = 0\}$. Положим $t_{j_n} = \dfrac{2j_n}{\sqrt{2n}}$ и будем предполагать, что $j_n \to \infty$, $\dfrac{j_n}{n} \to 0$.

Теорема 1. *Если* $\dfrac{t_{j_n}}{\sqrt{n}} \to 0$, *то при* $n \to \infty$

$$P_{2j_n}^{2n} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}\,\varphi_\alpha(t_{j_n}), \tag{2}$$

где

$$\varphi_\alpha(s) = \frac{s^{2\alpha}}{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} e^{-s^2/2}, \quad s > 0.$$

Эта теорема — обобщение теоремы, полученной в [1] для $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Доказательство теоремы такое же, как в [1], с соответствующими дополнениями.

Доказательство. В [2] показано, что

$$P_{2j_n}^{2n} = \frac{\Gamma(2j_n + 2\alpha)}{\Gamma(2j_n+1)\Gamma(2\alpha)} \frac{\int\limits_{-1}^{1} x^{2n} C_{2j_n}^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} [C_{2j_n}^{\alpha}(x)]^2 (1-x^2)^{\alpha-1/2}\,dx}, \tag{3}$$

где $C_{2j_n}^{\alpha}(x)$ — полином Гегенбауэра или ультрасферический полином. Известно (см., например, [3]), что

$$\int\limits_{-1}^{1} [C_{2j_n}^{\alpha}(x)]^2 (1-x^2)^{\alpha-1/2}\,dx = \frac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(2j_n+2\alpha)}{\Gamma(2j_n+\alpha)\Gamma(2j_n+1)\Gamma^2(\alpha)}; \tag{4}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} x^{2n} C_{2j_n}^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} x^{2n} C_{2j_n}^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(2j_n+2\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2j_n+1)} \int_0^1 x^{2n}(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} P^{1/2-\alpha}_{2j_n+\alpha-1/2}(x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2j_n+2\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2j_n+1)\Gamma(n+1-j_n)\Gamma(n+j_n+\alpha+1)}. \tag{5}$$

Мы воспользовались соотношением (см. [3])

$$C_n^\nu(x) = 2^{\nu-1/2}\frac{\Gamma(n+2\nu)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(2\nu)\Gamma(n+1)}(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}} P^{\frac{1}{2}-\nu}_{n+\nu-1/2}(x), \tag{6}$$

где $P_\nu^\mu(x)$ — функция Лежандра, и формулой Бернса

$$\int_0^1 x^\sigma(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{\mu-1}\Gamma(1/2+\sigma/2)\Gamma(1+\sigma/2)}{\Gamma(1+\sigma/2-\nu/2-\mu/2)\Gamma(\sigma/2+\nu/2-\mu/2+3/2)}. \tag{7}$$

Следовательно,

$$P^{2n}_{2j_n} = \frac{\sqrt{\pi}(2j_n+\alpha)\Gamma(2j_n+2\alpha)\Gamma(2n+1)}{2^{2n+2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(2j_n+1)\Gamma(n-j_n+1)\Gamma(n+j_n+\alpha+1)}. \tag{8}$$

Из формулы Стирлинга $\Gamma(x) \sim x^{x-1/2}e^{-x}$, $x \to \infty$, следует, что

$$\frac{(2j_n+\alpha)\Gamma(2j_n+2\alpha)}{\Gamma(2j_n+1)} \sim (2j_n)^{2\alpha}, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Аналогично

$$\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n-j_n+1)\Gamma(n+j_n+\alpha+1)} \sim \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} \times$$

$$\times \frac{n^{2n}}{(n-j_n)^{n-j_n}(n+j_n)^{n+j_n}}. \tag{10}$$

В [1] показано, что

$$\frac{n^{2n}}{(n-j_n)^{n-j_n}(n+j_n)^{n+j_n}} = e^{-\frac{t^2_{j_n}}{2}}(1+\alpha_n(t_{j_n})), \tag{11}$$

где $\alpha_n(t_{j_n}) \to 0$, если $\frac{t^2_{j_n}}{\sqrt{n}} \to 0$.

Объединяя соотношения (9) — (11), убеждаемся, что имеет место соотношение (2). Теорема доказана.

Если обозначить $s_{j_n} = \frac{2j_n+1}{\sqrt{2n+1}}$, то точно так же можно доказать, что

$$P^{2n+1}_{2j_n+1} \sim \frac{2}{\sqrt{2n+1}}\varphi_\alpha(s_{j_n}), \quad n \to \infty, \tag{12}$$

если $\frac{s^2_{j_n}}{\sqrt{n}} \to 0$.

Используя (2) и (12) так же, как в [1], можно получить следующий результат.

Теорема 2. *Если u_n и v_n — положительные последовательности, такие, что $u_n < v_n$, $u_n (v_n) \to \infty$, $\frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \left(\frac{v_n^2}{\sqrt{n}} \right) \to 0$, то при $n \to \infty$*

$$P\left\{u_n < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < v_n\right\} \sim \Phi_\alpha (v_n) - \Phi_\alpha (u_n), \tag{13}$$

где $\Phi_\alpha (v) = \int\limits_0^v \varphi_\alpha (s)\, ds,\ v > 0.$

2. Теоремы 1 и 2 позволяют доказать теорему о больших уклонениях.

Теорема 3. *Если t_n — положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности так, что $\frac{t_n^2}{\sqrt{n}} \to 0$, то*

$$P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant t_n\right\} \sim 1 - \Phi_\alpha (t_n). \tag{14}$$

Дополнениями к доказательству, приведенному в [1], являются следующие. В нашем случае

$$\frac{P_{2k+2}^{2n}}{P_{2k}^{2n}} \equiv \rho_n (k) = \frac{(2k + 2 + \alpha)(2k + 1 + 2\alpha)(2k + 2\alpha)(n - k)}{(2k + 2\alpha)(2k + 2)(2k + 1)(n + k + \alpha + 1)}\,. \tag{15}$$

Для достаточно большого фиксированного n $\rho_n (k)$ — монотонно невозрастающая по k функция. Соотношение $\rho_n (k) < 1$ при $k \geqslant \sqrt{n}$ можно получить, используя верхнюю границу наибольшего положительного корня уравнения $1 - \rho_n (k) = 0$, приведенную в [4].

Оказывается, что в нашем случае

$$(1 - \rho_n (t_{j_n}))^{-1} \sim \frac{\varphi_\alpha (t_{j_n})}{t_{j_n}} \sim 1 - \Phi_\alpha (t_{j_n}), \quad n \to \infty, \tag{16}$$

если $\frac{j_n^4}{n^3} \to 0,\ n \to \infty.$

Приведенные соотношения позволяют получить оценку

$$P (S_{2n} \geqslant 2j_n\} = O (1 - \Phi_\alpha (t_{j_n})),\ n \to \infty, \tag{17}$$

из которой с помощью соотношения (13) следует справедливость теоремы.

1. Rosenkrantz W. A. A local limit theorem for a certain class of random walks.— Ann. Math. Statist., 1966. 37, № 4, p. 855—859.
2. Karlin S., Mc — Gregor, J. Random walks.— Illinois J. Math., 1959, 3, № 1 p. 66—81.
3. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1; Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 431 с.

Институт кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию
15.III 1979 г.