УДК 517.9

Чан Ким Тьи

Асимптотический метод построения решений дифференциальных уравнений N-го порядка с медленно меняющимися параметрами в неавтономном случае

В данной заметке мы приведем результаты исследования решений квазилинейного неавтономного дифференциального уравнения высокого порядка с медленно меняющимися параметрами

$$x^{(N)}(t)+\alpha_1(\tau)\,x^{(N-1)}(t)+\ldots+\alpha_N(\tau)\,x(t)=\varepsilon F(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \theta, \varepsilon), \quad (1)$$

где $\dfrac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$, а $F(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \theta, \varepsilon)$ — функция, периодическая по θ с периодом 2π, и может быть представлена в виде

$$F(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \theta, \varepsilon)=\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta}F_n(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \quad (2)$$

F_n является полиномами от $x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \varepsilon$, с зависящими от τ коэффициентами.

Допустим, что для всех $\tau\in[0, L]$ коэффициенты уравнения (1), а также функции $F_n(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \varepsilon)$ и $\nu(\tau)$ имеют достаточное число производных по τ. Предположим еще, что характеристическое уравнение для некоторого значения $\tau\in[0, L]$ имеет одну пару чисто мнимых корней $\lambda=\pm i\Omega(\tau)$ (простой критический случай), а остальные характеристические корни имеют отрицательную вещественную часть с достаточно большой абсолютной величиной.

Мы будем рассматривать резонансный случай, когда существует следующее соотношение:

$$\Omega(\tau)=\frac{p}{q}\,\nu(\tau)+\varepsilon\sigma(\tau), \quad (3)$$

где p и q — некоторые целые взаимно простые числа, выбор которых зависит от исследуемого резонанса.

При достаточно малом $\varepsilon>0$ будем иметь решение уравнения (1) в виде асимптотического ряда

$$\begin{gathered} x=a\cos\varphi+\varepsilon u_1(\tau, a, \theta, \varphi)+\varepsilon^2 u_2(\tau, a, \theta, \varphi)+\ldots \\ \varphi=\frac{p}{q}\,\theta+\psi \end{gathered} \quad (4)$$

где $u_1(\tau, a, \theta, \varphi)$, $u_2(\tau, a, \theta, \varphi), \ldots$ — функции, периодические с периодом 2π по отношению к переменным θ и φ. Кроме того, для однозначности определения функций $u_1(\tau, a, \theta, \varphi)$, $u_2(\tau, a, \theta, \varphi), \ldots$ требуется, чтобы в них отсутствовали $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Величины a и ψ, как функции времени, определяются следующими уравнениями:

$$\begin{gathered} \frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau, a, \psi)+\varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi)+\ldots \\ \frac{d\psi}{dt}=\varepsilon[\sigma(\tau)+B_1(\tau, a, \psi)]+\varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi)+\ldots \end{gathered} \quad (5)$$

После обычных подстановок и вычислений находим следующие выражения для A_1, A_2:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi^2 (s_1^2 + s_2^2)} \sum_r e^{irq\psi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0 (s_1 \cos\varphi + s_2 \sin\varphi)\, e^{-irp\bar{\psi}} d\varphi d\theta,$$

$$B_1 = \frac{1}{2a\pi^2 (s_1^2 + s_2^2)} \sum_r e^{irq\psi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0 (s_2 \cos\varphi - s_1 \sin\varphi)\, e^{-irq\bar{\psi}} d\varphi d\theta, \tag{6}$$

где индекс r принимает конечное число целых значений из-за предположения (2), а $\bar{\psi} = \varphi - \frac{p}{q}\theta$,

$$s_1 = \sum_{k=1}^{N} k\alpha_{N-k}(\tau)\, \Omega^{k-1}(\tau) \sin k\frac{\pi}{2}, \quad s_2 = \sum_{k=1}^{N} k\alpha_{N-k}(\tau)\, \Omega^{k-1}(\tau) \cos k\frac{\pi}{2}.$$

Для неизвестной функции $u_1(\tau, a, \theta, \varphi)$ имеет место представление

$$u_1(\tau, a, \theta, \varphi) = \sum_{m,n} \frac{e^{i(n\theta + m\varphi)} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \varphi)\, e^{-i(n\theta+m\varphi)} d\theta d\varphi}{4\pi^2 \sum_{k=0}^{N} \alpha_{N-k} (i\Omega)^k \left(m + n\frac{q}{p}\right)^k}$$

$$(m \neq qr \pm 1,\ n \neq -pr)$$

$$F_0(\tau, a, \theta, \varphi) = F\left(\tau, a\cos\varphi, \ldots, a\Omega^N \cos\left(\varphi + N\frac{\pi}{2}\right), \theta, 0\right) -$$

$$- \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{N} k\alpha_{N-k} \frac{d\Omega^{k-1}(\tau)}{d\tau} \sin\left(\varphi + k\frac{\pi}{2}\right).$$

В качестве первого приближения принимаем выражение $x = a\cos\left(\frac{p}{q}\theta + \psi\right)$, где a и ψ должны быть определены из уравнений первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = \varepsilon\,[\sigma(\tau) + B_1(\tau, a, \psi)],$$

в котором функции $A_1(\tau, a, \psi)$, $B_1(\tau, a, \psi)$ имеют вид (6).

Улучшенное первое приближение

$$x = a\cos\left(\frac{p}{q}\theta + \psi\right) + \frac{\varepsilon}{4\pi^2} \sum_{m,n} \frac{e^{i(n\theta+m\varphi)} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \varphi)\, e^{-i(n\theta+m\varphi)} d\theta d\varphi}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_{N-k} (i\Omega)^k \left(m + n\frac{p}{q}\right)^k},$$

$$m = qr \pm 1,\ n \neq -pr.$$

Вычисление последующих приближений не вызывает принципиальных трудностей.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение более общего вида

$$x^{(N)} + \alpha_1(\tau) x^{(N-1)} + \ldots + \alpha_{N-1}(\tau) x^{(1)} + \alpha_N(\tau) x = \varepsilon F(\tau, xx^{(1)}, \ldots$$

$$\ldots, x^{(N)}, \theta_1, \ldots, \theta_r, \varepsilon), \tag{7}$$

где $\frac{d\theta_j}{dt} = \nu_j(\tau)$, а функция $F(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \theta_1, \ldots, \theta_r, \varepsilon)$ периодическая по каждому θ_j с периодом 2π и может быть представлена в виде

$$F(\tau, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, \theta_1, \ldots, \theta_r, \varepsilon) = \sum_p e^{i(p_1\theta_1 + \ldots + p_r\theta_r)} F_p(\tau, x, \ldots, x^{(N)}, \varepsilon),$$

здесь $p = (p_1, \ldots, p_r)$, $p_j \in (-N_i, N_i)$ (N_i — целое число), $F_p(\tau, x, \ldots, x^{(N)}, \varepsilon)$— полиномы от $x, \ldots, x^{(N)}$, ε с зависящими от τ коэффициентами.

Предложим, что коэффициенты $\alpha_i(\tau)$ уравнения (7), а также $F_n(\tau, x, \ldots$ $\ldots, x^{(N)}, \varepsilon)$ и $\nu_j(\tau)$ имеют достаточное число производных для всех τ, принадлежащих интервалу $[0, L]$ и что характеристическое уравнение для некоторого постоянного значения $\tau \in [0, L]$ имеет l пар чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\Omega_s(\tau)$, $s = 1, 2, \ldots, l$, а остальные характеристические корни имеют отрицательную вещественную часть с достаточно большой абсолютной величиной. Кроме того, предположим, что существуют следующие соотношения между $\Omega_S(\tau)$ и $\nu_s(\tau)$

$$q_{1m}\omega_1(\tau) + \ldots + q_{lm}\omega_l(\tau) + p_{1m}\nu_1(\tau) + \ldots + p_{rm}\nu_r(\tau) = 0 \quad m = 1, 2, p, \tag{8}$$

где $\omega_s = \Omega_s(\tau) - \varepsilon\sigma_s(\tau)$, $s = 1, 2, \ldots, l$, $\sigma_s(\tau)$ — отклонение частот, q_{im}, p_{jm}— целые числа.

Мы будем искать решение уравнения (7) в виде асимптотического ряда

$$x = \sum_{s=1}^{l} a_s \cos\varphi_s + \varepsilon u_1(\tau, a, \theta, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \theta, \varphi) + \ldots$$

$$a = (a_1, \ldots, a_l), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l), \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \tag{9}$$

$$\varphi_s = \eta_s + \psi_s, \tag{10}$$

здесь η_s, $s = \overline{1, l}$, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\eta_s}{dt} = \omega_s, \tag{11}$$

$q_{1m}\eta_1 + \ldots + q_{lm}\eta_l + p_{1m}\theta_1 + \ldots + p_{rm}\theta_r = 0$, $m = \overline{1, p}$, а $u_i(\tau, a, \theta, \varphi)$ — функции, периодические по θ и φ с периодом 2π, ограниченные для конечных значений a и не содержат $\sin\varphi_s$ и $\cos\varphi_s$. Величины a_s и ψ_s $(s = \overline{1, l})$, как функции времени, определяются из следующих уравнений:

$$\frac{da_s}{dt} = \varepsilon A_{1s}(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_{2s}(\tau, a, \psi) + \ldots \tag{12}$$

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \varepsilon[\sigma_S(\tau) + B_{1s}(\tau, a, \psi)] + \varepsilon^2 B_{2s}(\tau, a, \psi) + \ldots \quad \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_l).$$

После несложных вычислений получаем

$$A_{1S} = \frac{2}{(2\pi)^{l+r}(L_{1s}^2 + L_{2s}^2)} \sum_\mu e^{i\sum\limits_{m=1}^{\rho} r_{ms\mu}\psi_m^*} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \varphi)(L_{1S}\cos\psi_S +$$

$$+ L_{2S}\sin\varphi_s) e^{-i\sum\limits_{m=1}^{\rho} r_{ms\mu}\bar{\psi}_m^*} d\varphi_1 \ldots d\varphi_l d\theta_1 \ldots d\theta_r, \tag{13}$$

$$B_{1S}=\frac{2}{(2\pi)^{l+r}a_s(L_{1s}^2+L_{2s}^2)}\sum_{\mu}e^{i\sum\limits_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}\psi_m^*}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\varphi)(L_{2S}\cos\varphi_s-$$

$$-L_{1S}\sin\varphi_s)e^{i\sum\limits_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}\bar{\psi}_m^*}d\varphi_1\ldots d\varphi_l d\theta_1\ldots d\theta_r,$$

где

$$\psi_m^* + q_{1m}\psi_1+\ldots+q_{lm}\psi_l,\quad \bar{\psi}_m^*=q_{1m}\varphi_1+\ldots+q_{lm}\varphi_m+p_{1m}\theta_1+\ldots+p_{rm}\theta_r,$$

$$L_{1s}=\sum_{k=1}^{N}k\Omega_s^{k-1}(\tau)\alpha_{N-k}(\tau)\sin k\frac{\pi}{2},\quad L_{2s}=\sum_{k=1}^{N}k\Omega_s^{k-1}(\tau)\alpha_{N-k}(\tau)\cos k\frac{\pi}{2}.$$

В качестве первого приближения решений уравнения (1) принимаем выражение $x=\sum\limits_{s=1}^{l}a_s\cos\varphi_s$, в котором a_s, φ_s удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da_s}{dt}=\varepsilon A_{1S}(\tau,a,\psi),\qquad \frac{d\varphi_s}{dt}=\Omega_s(\tau)+\varepsilon B_{1s}(\tau,a,\psi), \tag{14}$$

где $A_{1s}(\tau,a,\psi)$, $B_{1s}(\tau,a,\psi)$ определяются формулами (13). Улучшенное первое приближение

$$x=\sum_{s=1}^{l}a_s\cos\varphi_s+\varepsilon\sum_{p,q}\frac{F_{0qp}e^{i(q_1\varphi_1+\ldots+q_l\varphi_l+p_1\theta_1+\ldots+p_r\theta_r)}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\alpha_{N-k}i^k(q_1\Omega_1+\ldots q_l\Omega_l+p_1\nu_1+\ldots+p_r\nu_r)^k},$$

$$q_j=\sum_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}q_{jm}\pm\delta_{js},\quad p_v\neq\sum_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}p_{vm}.$$

Здесь a_s, φ_s являются решениями системы (14). Вычисление более высоких приближений не представляет затруднений.

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1974. 495 с.
2. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М. : Наука, 1964. 424 с.
3. Чан Ким Тьи. Асимптотический метод построения решений дифференциальных уравнений N-го порядка с медленно меняющимися параметрами в автономном случае.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 3, с. 427—429.

Вьетнам

Поступила в редакцию
4.11.1980 г.