УДК 517.947

Н. Н. Чаус

О влиянии младших коэффициентов на поведение решения дифференциального уравнения в полупространстве

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)\,u \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant p} a_\alpha D^\alpha u,$$

где $D^\alpha = D^{\alpha_m} \ldots D_m^{\alpha_m}$, $D_k = \dfrac{d}{dx_k}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, $p \geqslant 1$. Коэффициенты $a_\alpha = a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ предполагаются комплексными постоянными, а решения этого уравнения определенными в области $G: t > 0$, $-\infty < x_k < \infty$, $k = 1, \ldots, m$.

Теорема 1. *Если решение $u(x, t)$ удовлетворяет в области G условиям:*

$$|u| \leqslant C \exp\{-\delta |x| + t \operatorname{Re} a_0\} (1 + t)^N, \tag{1}$$

$$|D^\beta u| \leqslant \exp\{-\delta |x|\}\, \Phi(t), \quad (|\beta| \leqslant p - 1) \tag{2}$$

с какими-нибудь C, δ, $N > 0$ и непрерывной положительной при $t > 0$ функцией $\Phi(t)$, то $u(x, t) \equiv 0$.

Доказательство. *А.* Пусть $a_0 = a_{0,\ldots,0} = 0$. Будем говорить, что $n = (n_1, \ldots, n_m) \geqslant 0$, если все n_k неотрицательны. Введем последовательность функций $f_n(t)$, определяя ее для $n \geqslant 0$ формулой

$$f_n(t) = f_{n_1,\ldots,n_m}(t) = (u, x^n) = \int u(x, t)\, x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m} dx_1 \ldots dx_m$$

и полагая $f_n(t) = 0$ для остальных n. Учитывая условия (1) и (2) при $n \geqslant 0$, получаем:

$$f_n'(t) = (u, P^+(D)\, x^n) = \Big(u, \sum_{|\alpha| \leqslant p} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha x^n\Big) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha x^n) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant p} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha b_{\alpha;n} f_{n-\alpha}(t), \tag{3}$$

где, можно считать, $b_{\alpha;n} \neq 0$ при всех α, $n \geqslant 0$. Отметим, что условие (2) используется в доказательстве теоремы только при получении равенства $f_n'(t) = (u, P^+(D)\, x^n)$ и поэтому может быть ослаблено для конкретных $P(D)$ так, что условие (2) будет выполняться не для всех мультииндексов β с условием $|\beta| \leqslant p - 1$, а только для некоторого подмножества их.

Полученное дифференциально-разностное соотношение (3) для функций $f_n(t)$ характеризуется тем, что мультииндексы, фигурирующие в правой части формулы (3), имеют длину меньшую, чем длина мультииндекса при $f_n'(t)$. Многократное применение формулы (3) приводит к тому, что $f_n^{(r)}$ $(r = |n|)$ выражается линейной комбинацией функций $f_k(t)$, где в каждом мультииндексе k имеются неположительные координаты, откуда $f_n^{(r)}(t) = 0$. Итак, $f_n(t)$ — полиномы от t. Степени этих полиномов не превышают числа N, так как $|f_n(t)| \leqslant (|u|, |x^n|) \leqslant C_n (1+t)^N$. Предположим, что все $f_n(t)$ не равны тождественно нулю. Тогда имеются полиномы (может быть, всего один) $f_{n^0}(t) = A_0 t^{N_0} + A_1 t^{N_0 - 1} + \ldots$, где $A_0 \neq 0$ и N_0 — максимальная для всех $f_n(t)$ степень $(0 \leqslant N_0 \leqslant N)$. Упорядочим все полиномы $f_n(t)$ следующим образом: будем считать, что $f_n(t)$ следует за полиномом $f_\nu(t)$, если мультииндекс n следует за мультииндексом ν. Последнее означает, что при последовательном сравнении координат n_k и ν_k $(k=1, \ldots, m)$ этих мультииндексов при первом несовпадении n_k и ν_k обнаруживается, что $n_k > \nu_k$. Просматривая полученную таким образом цепочку полиномов, начиная с $f_0(t) = \text{const}$, отмечаем в ней первый полином степени N_0. Пусть это будет $f_{n_0}(t)$. После этого упорядочим набор коэффициентов a_α, считая, что a_β следует за a_α, если мультииндекс β следует за мультииндексом α. Просматривая полученный ряд коэффициентов, начиная с $a_0=0$, отмечаем первый коэффициент, отличный от нуля. Пусть это будет a_{α_0}.

Далее рассмотрим соотношение (3) для $n = n^0 + \alpha^0$:

$$f'_{n^0+\alpha^0}(t) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha b_{\alpha;\alpha^0+n^0} f_{n^0+\alpha^0-\alpha}(t).$$

В правой части этой формулы все α, отличные от α^0, следуют за α^0, поэтому мультииндекс $n^0+\alpha^0-\alpha$ предшествует мультииндексу $n^0 = n^0 + \alpha^0 - \alpha^0$. Следовательно, только слагаемое $(-1)^{|\alpha^0|} a_{\alpha^0} b_{\alpha^0+n^0} f_{n^0}(t)$ есть в точности полином степени N_0, а остальные слагаемые суть полиномы меньшей степени, так как они предшествуют полиному $f_{n^0}(t)$. В результате $f'_{n^0+\alpha^0}(t)$ — полином степени N_0, откуда $f_{n^0+\alpha^0}$ — полином степени N_0+1, что противоречит максимальности N_0. Этим мы опровергли сделанное предположение о существовании нетривиальных $f_n(t)$, так что $f_n(t) \equiv 0$. Отсюда уже легко получить $u(t, x) \equiv 0$. Рассмотрим, например, $\operatorname{Re} u(t, x)$ и обозначим через $u_+(t, x)$ неотрицательную часть этой функции, так что $\operatorname{Re} u(t, x) = u_+(t, x) - u_-(t, x)$, где $u_\pm(t, x) \geqslant 0$. Учитывая оценки $|u_\pm(t, x)| \leqslant C \exp\{-\delta|x|\}(1+t)^N$ получаем равенство $s_n(t) \equiv (u_+(t, x), x^n) = (u_-(t, x), x^n)$, причем

$$|s_{0,\ldots,0,q,0,\ldots,0}(t)| \leqslant \left| \int u_+(t, x) x_k^q dx_1 \ldots dx_m \right| \leqslant C(t) \int e^{-\delta|x|} |x_k|^q dx_1 \ldots dx_m \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta_1|x_k|} |x_k|^q dx_k \leqslant 2C(\delta_1, t)\, \delta_1^{-q} q!.$$

Из полученной оценки следует, что при каждом фиксированном $t>0$ многомерная моментная последовательность $s_n(t)$ удовлетворяет условию $\sum_{q=0}^{\infty} (\sqrt[2q]{S_{2q}})^{-1} = \infty$, где $S_q = s_{q,0,\ldots,0}(t) + \ldots + s_{0,\ldots,0,q}(t)$, а названное условие дает единственность интегрального представления многомерной моментной последовательности $s_n(t)$ [1, с. 279]. Поэтому имеем $u_+(t, x) = u_-(t, x) \equiv 0$ и $\operatorname{Re} u(t, x) \equiv 0$.

Б. Пусть $a_0 \neq 0$. Введем функцию $v(t, x) = u(t, x) e^{-a_0 t}$. Она является решением уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = [P(D) - a_0] v$, коэффициент которого при нулевой производной от v равен нулю. Из условий, которым по теореме удовлетворяет $u(t, x)$, следует, что $v(t, x)$ удовлетворяет условиям п. А, откуда $v(t, x)$ и $u(t, x)$ тождественно равны нулю.

Теорема доказана.

Путем введения новой функции, как в п. Б, можно очень просто получить некоторое обобщение доказанной теоремы. А именно, теорема будет верна, если в ней оценки (1) и (2) на решение $u(t, x)$ заменить такими:

$$|u| \leqslant C \exp\{-\delta|x| + \operatorname{Re}(\lambda, x) + t \operatorname{Re} P(\lambda)\}(1+t)^N, \qquad (1^*)$$

$$|D^\beta u| \leqslant \exp\{-\delta|x| + \operatorname{Re}(\lambda, x)\} \Phi(t) \quad (|\beta| \leqslant p-1), \qquad (2)$$

где, в дополнение к предыдущему, $(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$, λ_k — какие-либо комплексные числа. При $\lambda_k \equiv 0$ условия (1*) и (2*) превращаются в (1) и (2). Чтобы убедиться в справедливости более общей формулировки, введем функцию $v(t, x) = e^{-(\lambda, x)} u(t, x)$. Она будет решением уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = P(D + \lambda) v$, где $D + \lambda = (D_1 + \lambda_1) \ldots (D_m + \lambda_m)$ и, в частности, коэффициент, стоящий при нулевой производной в этом уравнении, равен $P(\lambda)$. Легко проверить, что из (1*) и (2*) следует, что $v(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и поэтому равна нулю, откуда и $u(t, x) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь тот же вопрос с использованием другой методики для системы уравнений $\frac{\partial u}{\partial t} = P(iD) u(t, x)$ с постоянными коэффициентами, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$, $t > 0$. Будем предполагать, что матрица $P(iD)$ обладает следующим свойством: $\min\limits_{j,\lambda} \operatorname{Re} r_j(\lambda) \geqslant B > -\infty$, где $r_j(\lambda)$ $(j = 1, \ldots, s)$ — корни характеристического уравнения $\det \| P(\lambda) - rE \| = 0$, $(-\infty < \lambda_k < \infty,\ k = 1, \ldots, m)$. Обозначим через p максимальный порядок дифференцирований, входящих в матрицу $P(iD)$.

Теорема 2. *Пусть $u(t, x)$ — решение системы уравнений, определенное в полупространстве $t > 0$ и удовлетворяющее там условиям $\| u \| \leqslant e^{t(B-\varepsilon)} h(x)$, $\| D^\beta u \| \leqslant \Phi(t) h(x)$ $(|\beta| \leqslant p - 1)$, где $\varepsilon > 0$, $\Phi(t)$ — положительная и непрерывная при $t > 0$ функция, $h(x)$ — непрерывная, положительная и стремящаяся к нулю при $|x| \to \infty$ функция, для которой $\int h(x)\, dx_1 \ldots dx_m < \infty$. Тогда обязательно $u(t, x) \equiv 0$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье по x решения $u(t, x)$:

$$v(t, \lambda) = \int u(t, x) e^{i(\lambda, x)} dx.$$

Благодаря оценкам на $\| D^\beta u \|$, она будет решением системы уравнений $\frac{dv(t, \lambda)}{dt} = P(\lambda) v(t, \lambda)$ и будет иметь оценку $\| v(t, \lambda) \| \leqslant C_0 e^{t(B-\varepsilon)}$. Решение $v(t, \lambda)$ определяется вектор-функцией $C(\lambda)$ по формуле $v(t, \lambda) = e^{tP(\lambda)} C(\lambda)$, откуда

$$\| C(\lambda) \| \leqslant \| e^{-tP(\lambda)} \| \, \| v(t, \lambda) \| \leqslant C_0 e^{t(B-\varepsilon)} \| e^{-tP(\lambda)} \|.$$

Покажем, что правая часть последнего неравенства при любом фиксированном λ стремится к нулю, если $t \to \infty$. Для этого воспользуемся оценкой нормы матрицы $e^{tQ(\lambda)}$ для полиномиальной матрицы $Q(\lambda)$ порядка n. Если обозначить через $\rho_1(\lambda), \ldots, \rho_n(\lambda)$ корни (не обязательно все они различны) характеристического уравнения $\det \| Q(\lambda) - \rho E \| = 0$ и положить $\Lambda(\lambda) = \max\limits_j \operatorname{Re} \rho_j(\lambda)$, то имеет место оценка [2]:

$$\| e^{tQ(\lambda)} \| \leqslant e^{t\Lambda(\lambda)} \left[1 + 2t \| Q(\lambda) \| + \ldots + \frac{(2t)^{n-1}}{(n-1)!} \| Q(\lambda) \|^{n-1} \right].$$

Для $Q(\lambda) = -P(\lambda)$ получаем

$$\| e^{-tP(\lambda)} \| \leqslant e^{t\Lambda(\lambda)} \left[1 + 2t \| P(\lambda) \| + \ldots + \frac{(2t)^{n-1}}{(n-1)!} \| P(\lambda) \|^{n-1} \right],$$

где $\Lambda(\lambda) = \max \operatorname{Re} \rho_j(\lambda) = \max \operatorname{Re}(-r_j(\lambda))$. Так как в условиях теоремы $\Lambda(\lambda) \leqslant \max\limits_\lambda \Lambda'(\lambda) = \max\limits_{j,\lambda} \operatorname{Re} \rho_j(\lambda) = \max\limits_{j,\lambda} \operatorname{Re}(-r_j(\lambda)) = -\min\limits_{j,\lambda} \operatorname{Re} r_j(\lambda) \leqslant -B < \infty$, то тем самым получена оценка

$$\| e^{-tP(\lambda)} \| \leqslant e^{-tB} \left[1 + 2t \| P(\lambda) \| + \ldots + \frac{(2t)^{n-1}}{(n-1)!} \| P(\lambda) \|^{n-1} \right].$$

Теперь понятно, что $C_0 e^{t(B-\varepsilon)} \| e^{-tP(\lambda)} \|$ стремится при любом λ к нулю при $t \to \infty$. Возвращаясь к оценке для $\| C(\lambda) \|$, получаем $C(\lambda) \equiv 0$, откуда $v(t, \lambda)$, а значит и $u(t, x)$, тождественно равны нулю.

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 дополняют результат, полученный автором для решений систем уравнений с постоянными коэффициентами [3]. В новых обозначениях найденные ранее оценки на решение $u(t, x)$, из которых следует $u(t, x) \equiv 0$, имеют вид $|u| \leqslant C \exp\{-t^{q_1+\varepsilon} + a\|x\|^q\}$, где обязательно $q_1 > 1$. Оценки в теоремах 1 и 2 таковы, что решению $u(t, x)$ в конкретных случаях разрешается уже расти по $t \to \infty$.

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М. : Физматгиз, 1961. 310 с.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ, второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 327 с.
3. Чаус Н. Н. Вариант теоремы фрагмента —Линделефа для решений системы дифференциальных уравнений.—Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 10, с. 1897—1899.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
5.4.1979 г