КРИТИКА
И БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Рецензия на книгу В. Л. Гирко
Теория случайных детерминантов

(Киев: Изд-во при Киев. ун-те, 1980, 368 с.)

Случайные матрицы возникают при построении математической теории случайных операторов, решения проблем многомерного статистического анализа, математической экономики, изучении энергетических уровней атомных ядер. Хотя отдельные вопросы, связанные с изучением случайных матриц, рассматривались в работах ряда математиков и физиков (Р. Беллман, Ф. Дайсон, Р. Форте, Э. Вигнер, И. М. Лифшиц, В. А. Марченко, Л. А. Пастур, И. Н. Коваленко, И. Г. Журбенко), общая теория случайных матриц только сейчас начинает приобретать законченный вид. Значительная заслуга в этом принадлежит В. Л. Гирко. В его предыдущей монографии (В. Л. Гирко, Случайные матрицы, К., Издательство при Киевском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 1975, 443 стр.) содержится решение ряда трудных вопросов, относящихся к теории случайных матриц.

Рецензируемая монография представляет собой исследование проблем, связанных с изучением случайных детерминантов. Все приведенные в монографии результаты принадлежат автору, а многие из них публикуются впервые.

Кратко охарактеризуем содержание монографии.

Глава 1 носит вспомогательный характер. В ней приведены сведения о мере Хаара на группе ортогональных матриц, установлены некоторые интегральные представления для детерминантов, играющие весьма существенную роль в последующем изложении.

Глава 2 посвящена проблеме вычисления моментов случайных определителей. Моменты случайных детерминантов были известны ранее только лишь в отдельных весьма частных случаях и, как правило, для невысоких порядков (работы Р. Беллмана, Р. Форте, И. Г. Журбенко). Автор рецензируемой монографии создал ряд универсальных методов, которые дают возможность получать явные формулы для моментов любого порядка в весьма общих ситуациях.

В главе 3 указаны совместные распределения собственных векторов и собственных чисел для различных классов случайных матриц (симметричных, эрмитовых, антисимметричных, унитарных, ортогональных случайных матриц). При этом предполагается, что известна совместная плотность распределения элементов матрицы.

В главе 5 устанавливаются предельные теоремы для борелевских функций (с увеличивающимся числом переменных) от независимых случайных величин. Полученные результаты представляют самостоятельный интерес и, кроме того, существенно используются в главах 6—12 при изучении асимптотических распределений случайных детерминантов.

В главах 6—12 доказаны различные предельные теоремы для распределений соответствующим образом нормированных случайных детерминантов в предположении, что порядок детерминанта неограниченно увеличивается. При определенных предположениях относительно элементов детерминанта описываются возможные предельные распределения и выясняются условия сходимости к предельным распределениям. Много внимания уделено применимости теорем типа закона больших чисел и центральной предельной теореме.

С помощью общих теорем получены необходимые и достаточные условия сходимости к полукруговому закону Вигнера.

В главах 11—12 общие предельные теоремы для распределений случайных детерминантов конкретизируются для матриц специального вида (матрицы Ганкеля, Теплица, Якоби).

В главе 13 исследуются случайные функции вида $\det(I+itZ_n)$, где t — действительная или комплексная переменная (детерминанты Фредгольма).

В главе 15 приведены интересные результаты об асимптотическом поведении распределений решений системы линейных алгебраических уравнений со случайными коэффициентами при возрастании порядка системы до бесконечности. Особо отметим красивую теорему 15.I.I (автор называет ее законом арктангенса), утверждающую, что при определенных предположениях для решения $x_n = (x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})$ системы $Z_n \vec{x}_n = \vec{\eta}_n$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\{x_k^{(n)} < y\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} y.$$

В главе 16 исследуются интегральные уравнения Фредгольма со случайными вырожденными ядрами.

Монография В. Л. Гирко заинтересует широкий круг специалистов по теории вероятностей, а также специалистов, использующих теоретико-вероятностные и статистические методы в различных областях науки и техники. Эта интересная книга послужит стимулом дальнейших исследований.

М. И. Ядренко