УДК 530.12

Э. И. Кучеренко

Об одном видоизменении метода Галеркина для краевой задачи обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения

1. Метод Галеркина-сеток. В [1] указаны критерии, позволяющие различать, имеет ли уравнение

$$-y'' + Ky = f(x) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(a) = y(b) = 0, \ a < b \tag{2}$$

единственное решение во вводимых пространствах, не имеет ни одного или имеет, по крайней мере, два решения, в зависимости от вида Ky, значений a и b. Условимся считать y непрерывной на $[a, b]$ вместе со своей производной первого порядка, $f(x)$ имеющей конечную норму во вводимых пространствах, Ky — непрерывной функцией от y, y' на $[a, b]$. Будем считать, если особо не оговорено, что

$$Ky = \sum_{i=1}^{N_1} a_i y^{k_i} = \sum_{j=1}^{N_2} bj\,(y)^{k_j}, \tag{3}$$

где a_i, b_j — непрерывные функции от x на $[a, b]$. Рассмотрим пример из теории устойчивости стержней.

Пример. Дифференциальное уравнение шарнирно-опирающегося стержня согласно [2, с. 66]

$$d^2y/dx^2 + k^2 y = -k^2 e \tag{1'}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(l) = 0, \tag{2'}$$

где $k = \frac{P}{EI}$, E — модуль упругости, P — действующая сила, точка приложения которой отстоит от центра тяжести на расстоянии e, l — длина стержня. Общее решение этого уравнения $y = A\cos kx + B\sin kx$. Частное решение, удовлетворяющее условиям (2'), есть $y = e\left[\dfrac{\cos\frac{l}{2} - x}{\cos\frac{l}{2} - 1}\right]$. Отсюда видно, что решение существует и единственно при $kl \neq \frac{\pi}{2}$.

При $kl = \pi$ стрела прогиба неограниченно возрастает, т. е. происходит разрыв стержня. Чтобы предотвратить разрыв, стережень следует подпереть еще одной опорой. Тогда вместо задачи (1'), (2') мы должны решить задачу для системы

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + k^2y_1 = -k^2e; \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right); \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} + k^2y_2 = -k^2e;$$
$$\left(\frac{l}{2} < x \leqslant l\right) \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = y_1(l/2) = 0; \quad y_2(l) = y_2(l/2) = 0. \tag{5}$$

Общее решение (4) есть:

$$y_1 = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx - e; \quad y_2 = d_1 \cos kx + d_2 \sin kx - e. \tag{6}$$

Подставляя в (6), $x = \{0,\ l/2,\ l\}$ найдем: $c_1 = e$; $c_2 = \dfrac{e(1 - \cos l/2)}{\sin kl/2}$;

$$d_1 = \frac{e(\sin kl - \sin kl/2)}{\sin kl/2}; \; d_2 = \frac{e(\cos kl/2 - \cos kl)}{\sin kl/2}.$$

Задача (4), (5) имеет решение непрерывное и единственное при $kl/2 < \pi$. Таким образом, двухточечная задача (1′), (2′) была заменена трехточечной и решена пошаговым методом Эйлера. При этом считаем, что $y_1|_{x=\frac{l}{2}} = y_2|_{x=\frac{l}{2}}$ (неразрывность стержня).

Если стержень состоит из двух половин $\left[0,\ \dfrac{l}{2}\right], \left[\dfrac{l}{2},\ l\right]$ различного поперечного сечения, то задача (1), (2) сведется к краевой задаче для системы уравнений

$$E_1 I_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -P_1(y_1 + e_1),$$

$$E_1 I_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -P_2(y_2 + e_2) \tag{1″}$$

с условиями

$$y(0) = 0, \; y_2(l) = 0 \tag{2″}$$

и условиями склейки

$$y_1^1\left(\frac{l}{2}\right) = y_2^1\left(\frac{l}{2}\right). \tag{2‴}$$

Если стержень состоит из более чем двух частей, то задача может быть поставлена аналогично (1″), (2″), (2‴) и тоже решена пошаговым методом.

В механике для решения задачи (1′), (2′) в случае однородного стержня часто применяется метод Галеркина. Введем шаговое видоизменение этого метода и назовем его методом Галеркина-сеток. Он применим для решения задач о стержне с переменным сечением или имеющего больше, чем 2 точки опоры.

Решим задачу (1),(2) методом Галеркина-сеток. Отрезок $[a,\ b]$ разделим на некоторое число частей n, которое считаем равными.

Точки деления $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $h = \dfrac{b-a}{n}$. На каждой части рассматривается своя краевая задача:

$$-y_i'' + K(y_i,\ y_i') = f(x), \quad x \in [x_{i-1},\ x_i], \quad x_0 = a,\ x_n = b \tag{7}$$

$$y_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad y_i(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7′}$$

Причем $y_0 = y(a) = 0$, $y_n = y(b) = 0$, y_i — неизвестные числа. Сделаем краевые условия (7′) однородными, заменяя искомые функции $y_i(x)$ на функции z_i по формулам:

$$y_i(x) = z_i(x) + \frac{y_i(x - x_{i-1})}{h} + \frac{y_{i-1}(x_i - x)}{h}. \tag{8}$$

Это позволяет перейти от задачи (7), (7′) к задаче

$$-z_i'' + K(z_i,\ z_i',\ \overline{y}_{i-1},\ \overline{y}_i) = f(x); \quad x \in [x_{i-1},\ x_i] \tag{9}$$

с условиями

$$z_i(x_{i-1}) = z_i(x_i) = 0 \tag{9′}$$

с n неизвестными функциями z_i и n-1 неизвестными константами $y_1, \ldots$ $\ldots, y_{i-1}$. К системе (9) присоединим уравнения, полученные из условий непрерывности производной решения задачи (1),(2) на $[a, b]$, а именно: приравнивая производные от y_{i-1} и y_i из (8) при $x = x_i$

$$z_{i-1}' + \frac{\overline{y}_i}{h} - \frac{\overline{y}_{i-1}}{h} = z_i' + \frac{\overline{y}_{i+1}}{h} - \frac{y_i}{h} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{10}$$

Исключая из (9) $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{n-1}$ с учетом (10), получим систему:

$$-z_i'' + K(z_i,\ z_i',\ z_{i+1}) = f(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

из n уравнений с n неизвестными функциями и краевыми условиями (9′). К задаче (11), (9′) применим метод Галеркина, и m-е приближенное решение найдем в виде:

$$z_{im} = A_{i0} I_{i0} + A_i I_i + \ldots + A_{im} I_{im}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

где координатные функции могут иметь вид: $I_{i0} = (x - x_i)(x - x_{i+1})$; $I_{i1} = (x - x_i)(x - x_{i+1})\, x \ldots I_{im}\,(x - x_i)(x - x_{i+1})\, x^m$. Для каждой части отрезка $[a, b]$ получим

$$z_{(i+1)m} = [x - h(i+1)][x - h(i+2)] A_{(i+1)_0} + \ldots$$
$$\ldots + A_{(i+1)m} [x - h(i+1)][x - h(i+2)]\, x^{m-1}.$$

Приближенные решения задачи (1), (2) можно получить: 1. Увеличивая m, уменьшая h (увеличивая число делений отрезка $[a, b]$ и повышая степень аппроксимирующего полинома на каждом делении). 2. Увеличивая m при неизвестном h. 3. Уменьшая h при неизвестном m (как это делается, например, при приближенном вычислении определенного интеграла по методу Симпсона), ограничиваясь только нулевыми приближениями по Галеркину для каждого деления.

Найдем содержащиеся в (12) A_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, h;\ j = 0, 1, \ldots m)$ из системы

$$\int\limits_{a+(i-1)R}^{a+ih} \{-z_{ij}'' + K(z_{ij},\ z_{ij}',\ z_{(i+1)j}) - f_i(x)\} \times$$

$$\times [x - h(i+1)](x - h_i)\, x_j dx = 0; \ (i = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, m). \tag{13}$$

Получив A_{ij}, можно из (10) найти $\overline{y}_i\ (i = 1, \ldots, n)$.

Дадим обоснование сходимости предложенного метода. Для этого введем функциональные пространства на $[a, b]$. Рассмотрим множество функций L, удовлетворяющих условиям (2) и непрерывных на $[a, b]$ вместе со своими производными 1 порядка. Обозначим $A_0 y = (-1)\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Зададим, следуя [3], скалярное произведение y_1 на y_2 на $[a, b]$ в виде

$$(A_0 y_1 y_2) = \int\limits_a^b (A_0 y_1)\, y_2 dx = [y_1,\ y_2] = \int\limits_a^b y_1' y_2' dx.$$

Это гильбертово пространство H_0. На этом же множестве зададим и пространство $W_2^{(1)}$ Соболева [8] с нормой

$$\| y \|_{W_2^{(1)}} = \left\{ \int_a^b \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \int_a^b y^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и пространство $G[a, b]$ с расстоянием между y_1 и y_2 на $[a, b]$ $\rho(y_1, y_2)_{C[a,b]} = \max\limits_{[a,b]} | y_1(x) - y_2(x)|$. Из [3] и [8] следует, что если $y \in H_0$, то $y_1 \in H$. Из сравнения норм в C; H_0 и $W_2^{(1)}$ следует:

$$\| y \|_C \leqslant M \| y \|_{W_2^{(1)}} \leqslant \beta M \| y \|_{H_0}, \tag{14'}$$

где M, β — постоянные, не зависящие от выбора y.

2. О сходимости метода. Чтобы найти условия сходимости метода, необходимо задать специальное функциональное пространство. Введем функции z_{i0} так, чтобы

$$z_{10} = \begin{cases} z_1 & 0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ 0 & x > x_1 \end{cases} \qquad z_{i0} = \begin{cases} z_i & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ 0 & x > x_{i+1},\ x < x_i \end{cases},$$

а система (11) приняла вид:

$$\left. \begin{array}{l} - z''_{10} + K_{10}(z_{10}, z'_{10}, z_{20}) = f_{10}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ - z''_{n0} + K_{n0}(z_{(n-1)0}, z'_{(n-1)0}, z_{n0}) = f_{n0}(x) \end{array} \right\}. \tag{15}$$

Краевые условия (9′) станут:

$$z_{i0}(a) = z_{i0}(b) = 0. \tag{16}$$

Обозначим $z''_i = A_0 z_i$. Применим к обеим частям уравнений системы (15) оператор A_0^{-1}. Получим:

$$\left. \begin{array}{l} - z_{10} + \int\limits_a^b G(x, \xi)[K_{10} - f(\xi)]\, d\xi = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ - z_{n0} + \int\limits^b G(x, \xi)[K_{n0} - f(\xi)]\, d\xi = 0 \end{array} \right\}, \tag{17}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина уравнения $z''_{i0} = 0$ с (16). Перепишем систему (17) в виде:

$$\left. \begin{array}{l} z_{10} - T_1(z_{10}, z_{20}) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{n0} - T_n(z_{(n-1)0}, z_{n0}) = 0 \end{array} \right\} \tag{18}$$

Введем пространство $B[a, b]$, элементы которого $z = \{z_{10};\ z_{20} \ldots z_{n0}\}$, $z' = \{z'_{10};\ z'_{20}, \ldots, z'_{n0}\}$ с расстоянием между ними $\rho(z, z')_B = \max \| z_{i0} - z'_{i0} \|_{H_0}$. Обозначая $z_0 = \{z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0}\}$; $Tz_0 = \{T_1, T_2, \ldots T_n\}$, получим

$$z_0 = Tz_0. \tag{19}$$

Сходимость метода Галеркина для системы (18) и эквивалентной ей системы (15), (16) доказана теоремой 1.

Теорема 1. *Если* k_i и k_j *в* Ky *удовлетворяют условиям теоремы вложения С. Л. Соболева (вложение* $W_2^{(1)}$ *в* C [8, с. 64]) *и следствия из нее* ([8], стр. 78), *система имеет единственное решение ненулевого индекса, то ме-*

тод Галеркина для (19), *а вместе с тем и для* (15), (16) *в* B. Доказательство вытекает из теорем [(5, с. 477]) и ([6, с. 178]), так как оператор Tz_0 вполне непрерывен в B. Из сходимости метода Галеркина вытекает сходимость метода Галеркина-сеток для (1), (2).

Чтобы решить вопрос о существовании и единственности решения задачи (1), (2) в C, применим к обеим частям (1) оператор A_0^{-1}, обратный оператору $-A_0y=y''$, получим

$$y=Ty. \tag{20}$$

Теорема 2. *Оператор* Ty *удовлетворяет в* C *условиям Липшица*

$$\|Ty_m-Ty_n\|_C\leqslant\gamma\|y_m-y_n\|_C, \tag{21}$$

где $\gamma=\sqrt{b-a}\,GNrmR^{r-1}M$; $G=\max\limits_{[a,b]}|G(x,\xi)|$, $\|y\|_C\leqslant R$, $r=\max\begin{cases}k_i\\k_j\end{cases}$; $N=N_1+N_2$; $m=\max\limits_{[a,b]}\begin{cases}|a_i|\\|b_i|\end{cases}$, M — *наибольшая из постоянных теорем вложения Соболева* [8, с. 64, 78],[5, с. 478, 476].

Доказательство вытекает из того, что условия (21) можно получить для (20) в C с учетом (14) аналогично тому, как это сделано в [5, с. 478—480].

Если $\gamma<1$, то решение (20) (а вместе с тем и (1), (2)) существует и единственно в C, а индекс его равен 1. Выяснив вопрос о существовании и единственности решения задачи (1) (2) в $C\,[a, b]$, установим, каким должен быть максимальный шаг h, чтобы можно было применять пошаговый метод Галеркина.

Это легко сделать в случае, когда $\gamma<1$ при заданном K в условиях Липшица. Используя (21), можно выбрать $h=b-a<G^2N^2r^2m^2R^{2(r-2)}M^2$, т. е. равным длине отрезка $[a, b]$. Это означает, что примененный метод — обычный метод Галеркина. Если в этом случае брать шаг $h=\dfrac{b-a}{n}$, то получим пошаговый метод Галеркина, вопрос о сходимости которого выяснен выше.

В случае $\gamma\geqslant1$, нетрудно убедиться (1′), (2′), решение может не существовать $\left(\text{случай } \dfrac{kl}{2}=\pi\right)$. При делении $[0, l]$ на части и замене задачи (1′), (2′) на задачу (4), (5), решение будет существовать и будет единственным во вводимом пространстве. Так, при $l<\dfrac{1}{k}$; $\gamma<1$, что обеспечивает условие $l\neq\dfrac{\pi}{k}$ недостижения критической нагрузки, существует единственное решение (1′) (2′). Хотя метод Галеркина при $\gamma\geqslant1$ неприменим, его видоизменение применять можно.

В случае $\gamma\geqslant1$, когда решение (1), (2) может и существовать, применять метод Галёркина нельзя, т. к. нельзя гарантировать сходимость этого метода. В этом случае следует применять метод Галеркина-сеток, выбирая шаг h таким образом, чтобы при данном R выполнялось условие $GNrmR^{r-1}M\sqrt{h}<1$. Такое уменьшение h особенно эффективно, когда уравнение (1) линейное, т. е. содержит y и y' в первых степенях. Тогда в (21)

$$r=1,\ N=2,\ \gamma=\sqrt{b-a}\,GNmM.$$

В этом случае γ нельзя уменьшить за счет уменьшения R. Введем над $[a, b]$ пространство непрерывных функций $\overline{C}$ с нормой элемента $z=$

$=\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ в виде $\|z\|_{\bar{C}} = \max\limits_{i\in\overline{1,n}} \|z_i\|_C$. Легко показать, что для (4) условия (21) с $\gamma<1$ выполнены при $h=\frac{l}{2}<\frac{\pi}{k}$ в $\bar{C}$.

3. Оценка погрешности решений, получаемых по методу Галёркина-сеток. Метод Галёркина-сеток применим для решения краевой задачи обыкновенного уравнения в случае, когда может быть применен и метод Галеркина. Поэтому интересно сравнить погрешность этих методов. Если оператор имеет вид (3)

$$\|y\|_C \leqslant \beta M \|y\|_{H_0},$$

то из сходимости метода Галёркина в H_0 следует сходимость его в C. Поэтому оценку погрешности произведем в C.

Чтобы сравнить погрешности, получаемые при решении задачи (1), (2) по методу Галёркина и методу Галёркина-сеток, воспользуемся теоремой Джексона [7]. По теореме Джексона погрешность E_m метода Галёркина для задачи (1),(2) в $C[a, b]$ (m-е приближение) имеет вид:

$$E_m < \frac{C\gamma}{m}, \tag{22}$$

где γ — постоянная Липшица, которая для нашего случая имеет вид: $\gamma = G(b-a)PR^{r-1}(N_1(k-1)+N_2(r-1))$; $C=\frac{4C_5}{C_2}$; $C_5=\frac{\pi}{16}(C_3+C_4)$; $C_4=\frac{2}{\pi^2}$; $C_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\xi}{\xi^4}\,d\xi$; $C_3=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\xi}{\xi^3}\,d\xi$. Погрешность комбинированного метода $\bar{E}_m$ оценим в $\bar{C}$, так как

$$\|z\|_{\bar{C}} = \max_{i\in\overline{1,n}} \|z_{i0}\|_C,$$

то, проведя преобразования, аналогичные проделанным для Ty в C, получим, что постоянная $\bar{\gamma}$ в условиях Липшица в $\bar{C}$ есть:

$$\bar{\gamma} = \max_i \bar{\gamma}_i = \max_i G_i(x_{i+1}-x_i)PR^{r-1}[N_1(k-1)+N_2(r-1)]\frac{b-a}{n}. \tag{23}$$

Сравним (21) и (23), получим, так как $x_{i+1}-x_i<b-a$, $G_i<G$, $P_i\leqslant P$, $R_i\leqslant R$, то $\bar{E}_m<\frac{E_m}{n}$. Действительно, если сравнить

$$\bar{E}_m < C\max_i G_iP_iR_i^{r-1}[N_1(k-1)+N_2(r-1)](b-a)$$

и

$$E_m = CG(b-a)PR^{r-1}[N_1(k-1)+N_2(r-1)]\cdot\frac{1}{m},$$

то так как

$$\bar{\gamma} = \max_i G_iP_iR_i^{r-1}[N_1(k-1)+N_2(r-1)]\frac{b-a}{n} < \max_i G_iP_iR_i[N_1(k-1)+$$

$$+N_2(r-1)](b-a) < G(b-a)PR^{r-1}[N_1(k-1)+N_2(r-1)] = \gamma.$$

Отсюда и из (22) $E_m<E_m/n=C\gamma/mn$. Тем самым доказана теорема 3.

Теорема 3. *Погрешность комбинированного метода при делении отрезка на n частей оценивается:* $\bar{E}_m<C\gamma/nm$.

1. Горбунов А. Д., Кучеренко Э. И. К вопросу о разрешимости двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.— Докл. АН СССР, 1975, **220**, № 3, с. 1071—1073.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963, с. 880.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: ГИТТЛ, 1975., 476 с.
4. Кучеренко Э. И. Применение метода Галеркина к интегрированию нелинейных обыкновенных уравнений. Казань, 1962, с. 135—137.
5. Кучеренко Э. И. Применение метода Галеркина к интегрированию систем нелинейных обыкновенных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1970, **6**, № 3, с. 475—482.
6. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.—Л.: Гостехиздат, 1956, 392 с.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычисления. М.: Гос. изд-во, физ.-мат. лит., 1959, т. **1**, 464 с.
8. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962, 265 с.
9. Кучеренко Э. И., Петухов В. И. Определение входного воздействия на нелинейный преобразователь по результатам измерений на выходе. Новосибирск : Автометрия, 1970, № 5 с. 96—100.

Московский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 24.10.1978 г.
после переработки — 20.06.1980 г.