УДК 517.946

В. Г. Литвинов

Оптимальные задачи на собственные значения

1. Спектральная задача. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в R^2, $W=\prod\limits_{s=1}^{\nu} W_2^{l_s}(\Omega)$, V — замкнутое подпространство в W с нормой пространства W, $\prod\limits_{s=1}^{\nu} \overset{0}{W}{}_2^{l_s} \subset V$ и

$$p_j \in L(W, L_2(\Omega)) \quad (j=1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

т. е. P_j — линейное непрерывное отображение из W в $L_2(\Omega)$. Здесь $W_2^{l_s}(\Omega)$ — пространство Соболева [1], причем предполагается, что $l_s \geqslant 1$ $(s=1, 2, \ldots, \nu)$. $\overset{0}{W}{}_2^{l_s}(\Omega)$ — замыкание в $W_2^{l_s}(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых функций с носителем в Ω.

Определим множество

$$Y_p = \{h \mid h \in W_p^1(\Omega),\ e_1 \leqslant h \leqslant e_2\}, \tag{2}$$

где e_1, e_2 — положительные постоянные, $p \geqslant 2$.

Задано семейство билинейных непрерывных симметричных на пространстве $V \times V$ форм a_h, зависящих от параметра h, пробегающего множество Y_p, и определяемых выражением

$$a_h(u, v) = \iint\limits_{\Omega} \left[\varphi_1(h) \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(P_i u)(P_j v) + \varphi_2(h) \sum_{i,j=r+1}^{k} b_{ij}(P_i u)(P_j v) \right] dxdy,$$
$$r < k \quad (u, v \in V). \tag{3}$$

Здесь a_{ij}, $b_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$ $(i, j=1, 2, \ldots, k)$ $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — непрерывные функции, заданные на интервале $[e_1, e_2]$ и принимающие значения в R_+ $(R_+ = \{t \mid t \in R,\ t > 0\})$.

Кроме того, предполагаем, что функции a_{ij}, b_{ij} таковы, что

$$\sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(x, y)\xi_i\xi_j \geqslant c \sum_{i=1}^{r} \xi_i^2 \qquad \forall (x, y) \in \Omega,\ \forall \xi \in R^r; \tag{4}$$

$$\sum_{i,j=r+1}^{k} b_{ij}(x, y)\xi_i\xi_j \geqslant c \sum_{i=r+1}^{k} \xi_i^2 \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega},\ \forall \xi \in R^{k-r},$$

где $c = \mathrm{const} > 0$.

Предполагаем далее, что система операторов $\{P_j\}_{j=1}^{k}$ коэрцитивна в V, т. е. существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что

$$\iint\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{k} (P_j u)^2\, dxdy \geqslant c_2 \| u \|_v^2 \qquad \forall u \in V. \tag{5}$$

Пусть $b_h(u, v)$ — билинейная форма на $V \times V$, зависящая от параметра $h \in Y_p$ и определяемая выражением

$$b_h(u, v) = \int_\Omega \int \rho \varphi_3(h) \sum_{i=1}^{\nu} u^{(i)} v^{(i)} dxdy \tag{6}$$

$$u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(\nu)}) \in V, \; v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(\nu)}) \in V;$$

где $\rho \in L_\infty(\Omega)$; $K_1 \leqslant \rho \leqslant K_2$; $K_1, K_2 = \mathrm{const} > 0$; $\varphi_3(t)$ — непрерывная функция, заданная на интервале $[e_1, e_2]$ и принимающая значения в R_+.

Из компактности вложения $W_2^l(\Omega) \to L_2(\Omega)$ $(l \geqslant 1)$ следует компактность вложения $V \to (L_2(\Omega))^\nu$. Отсюда в силу известных результатов (см., например, [2, 3]) следует.

Теорема 1. *Пусть a_h — билинейная на $V \times V$ форма, определяемая выражениями* (1), (3) — *и справедливы неравенства* (4), (5). *Пусть еще множество Y определяется выражением* (2), *а билинейная форма b_h—выражениями* (6). *Тогда для $\forall h \in Y_p$ существует последовательность собственных функций $u_i \in V$, отвечающих последовательности собственных значений λ_i таких, что*

$$a_h(u_i, v) = \lambda_i b_h(u_i, v) \quad \forall v \in V, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \ldots, \tag{7}$$

при этом

$$\lambda_1 = \frac{a_h(u_1, u_1)}{b_h(u_1, u_1)} = \inf_{u \in V} \frac{a_h(u, u)}{b_h(u, u)}, \quad u \neq 0. \tag{8}$$

Очевидно, что пара (u_1, λ_1) зависит от h. Эту зависимость обозначим через u_h, λ_h. Следовательно,

$$\lambda_h = \frac{a_h(u_h, u_h)}{b_h(u_h, u_h)} = \inf_{u \in V} \frac{a_h(u, u)}{b_h(u, u)}, \quad u = 0. \tag{9}$$

В силу теоремы 1 соотношением (9) определяется функция $f: h \to \to f(h) = \lambda_h$, заданная на Y_p со значениями в R. Используя то обстоятельство, что для двумерной ограниченной области Ω вложение $W_p^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ компактно при $p > 2$, доказывается лемма 1.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *функция*

$$h \to f(h) = \lambda_h = \inf_{u \in V} \frac{a_h(u, u)}{b_h(u, u)}, \quad u \neq 0$$

является непрерывным отображением из Y_p (с топологией, порожденной слабой топологией $W_p^1(\Omega)$) в R при $p > 2$.

2. Задача оптимального управления. Будем управлять функцией h, чтобы получить максимальное первое собственное число задачи (7). С этой целью введем допустимое множество управлений

$$U_\partial = \{h \mid h \in W_p^1(\Omega), \; \|h\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant C, \; \int_\Omega \int h dxdy \leqslant C_1, \; \check{h} \leqslant h \leqslant \hat{h}\}. \tag{10}$$

Здесь $p \geqslant 2$, $C, C_1, \check{h}, \hat{h}$ — положительные постоянные, причем $e_1 < \check{h} < \hat{h} < e_2$, где e_1, e_2 — положительные постоянные из (10).

Предполагаем, что постоянные в (10) выбраны так, что множество U_∂ не пустое.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти функцию h_0 и соответствующую пару (u_{h_0}, λ_{h_0}), для которых

$$h_0 \in U_\partial, \quad u_{h_0} \in V, \quad \lambda_{h_0} \in R, \tag{11}$$

$$\lambda_{h_0} = \frac{a_{h_0}(u_{h_0}, u_{h_0})}{b_{h_0}(u_{h_0}, u_{h_0})} = \inf_{u \in V} \frac{a_{h_0}(u, u)}{b_{h_0}(u, u)} =$$

$$= \sup_{h \in U_\partial} \inf_{u \in V} \frac{a_h(u, u)}{b_h(u, u)} = \sup_{h \in U_\partial} \lambda_h, \quad u \neq 0. \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть a_h, b_h — билинейные симметричные на $V \times V$ формы, определяемые соотношениями* (1), (3)—(6) *и не пустое множество U_∂ задается соотношениями* (10). *Тогда существует решение задачи оптимального управления* (11), (12).

Множество U_∂, определенное соотношением (10) снабдим топологией, порожденной топологией $W_p^1(\Omega)$. Через $\overset{0}{U}_\partial$ обозначим внутренность U_∂. Справедливо утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Допустим, что в* (10) $p > 2$ *и функция h_0, являющаяся решением задачи* (11), (12), *не равна тождественно $\check{h}$ в Ω. Тогда существует последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset \overset{0}{U}$ такая, что*

$$\lim_{n \to \infty} \| h_n - h_0 \|_{W_p^1(\Omega)} = 0. \tag{13}$$

Займемся построением приближенных решений задачи (11), (12). Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечномерных подпространств в $W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию предельной плотности

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\omega \in H_n} \| h - \omega \|_{W_p^1(\Omega)} = 0 \quad \forall h \in W_p^1(\Omega). \tag{14}$$

Рассмотрим задачу: найти функцию h_n и соответствующую пару (u_{h_n}, λ_{h_n}), для которых

$$h_n \in H_n \cap U_\partial, \; u_{h_n} \in V, \; \lambda_{h_n} \in R; \tag{15}$$

$$\lambda_{h_n} = \frac{a_{h_n}(u_{h_n}, u_{h_n})}{b_{h_n}(u_{h_n}, u_{h_n})} = \inf_{u \in V} \frac{a_{h_n}(u, u)}{b_{h_n}(u, u)} =$$

$$= \sup_{h \in H_n \cap U_\partial} \inf_{u \in V} \frac{a_h(u, u)}{b_h(u, u)} = \sup_{h \in H_n \cap U_\partial} \lambda_h \quad u \neq 0. \tag{16}$$

Утверждение доказываем с помощью леммы 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 2 и $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечномерных подпространств в $W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию* (14). *Тогда при любом достаточно большом n задача* (15), (16) *имеет решение, и эта задача имеет решение при любом n, если множество $H_n \cap \cap U_\partial$ не пустое при любом n. При этом*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{h_n} = \lambda_{h_0} = \sup_{h \in U_\partial} \lambda_h.$$

Из последовательности $\{h_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h_m\}$ такую, что $h_m \to h_0$ слабо в $W_p^1(\Omega)$, где h_0 — решение задачи (11), (12).

3. Двойственная задача оптимального управления собственным значением. Пусть по-прежнему (λ_h, u_h) — наименьшее собственное значение и соответствующая собственная функция задачи (7). Будем управлять функцией h. Определим допустимое множество управлений

$$U_\partial = \{h \mid h \in W_p^1(\Omega), \; \| h \|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant C, \; \check{h} \leqslant h \leqslant \hat{h}, \; f(h) \geqslant \hat{C}_1\}. \tag{17}$$

Здесь $p>2$, C, C_1, $\check{h}$, $\hat{h}$ — положительные постоянные, причем $e_1<\check{h}<\hat{h}<$ $<e_2$, где e_1, e_2 — положительные постоянные из (2),

$$f(h)=\lambda_h=\inf_{u\in V}\frac{a_h(u,u)}{b_h(u,u)},\quad u\neq 0 \tag{18}$$

Допустим, что постоянные C, C_1, $\check{h}$, $\hat{h}$ выбраны так, что множество U_∂ не пустое. Введем функцию цели $f_1:h\to f_1(h)$, относительно которой $h\to f_1(h)$ — непрерывное отображение из Y_p (с топологией, порожденной слабой топологией в $W_p^1(\Omega)$) и в R, при $p>2$.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию h_0 такую, что

$$h_0\in U_\partial,\ f_1(h_0)=\inf_{h\in U_\partial}f_1(h). \tag{19}$$

Теорема 4. *Пусть a_h, b_h — билинейные симметричные на $V\times V$ формы, определяемые соотношениями* (1), (3)—(9). *Пусть еще множество U_∂ не пустое и задается выражениями* (17)—(18), *а целевая функция $h\to$ $\to f_1(h)$ — непрерывное отображение из Y_p. Тогда существует решение задачи* (19).

Построим приближенные решения задачи (19). Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечномерных подпространств в $W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию (14).

Рассмотрим задачу: найти функцию h_n такую, что

$$h_n\in H_n\cap U_\partial,\ f_1(h_n)=\inf_{h\in H_n\cap U_\partial}f_1(h). \tag{20}$$

Множество U_∂, определяемое выражениями (17) — (18), снабжаем топологией, порожденной топологией $W_p^1(\Omega)$. Через $\mathring{U}_\partial$ обозначаем внутренность U_∂.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* (4) *и $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечномерных подпространств в $W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию* (14). *Допустим, что существует последовательность* $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $q_n\in\mathring{U}_\partial$ *при любом n и $q_n\to h_0$* в $W_p^1(\Omega)$, *где h_0 — решение задачи* (19). *Тогда при любом достаточно большом n задача* (20) *имеет решение, и эта задача имеет решение при любом n, если множество $H_n\cap U_\partial$ не пустое при любом n. При этом* $\lim\limits_{n\to\infty}f_1(h_n)=f_1(h_0)=$ $=\inf\limits_{h\in U_\partial}f_1(h)$.

Из последовательности $\{h_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{h_m\}$ такую, что $h_m\to h_0$ слабо в $W_p^1(\Omega)$.

В теореме 5 предполагается существование последовательности внутренних точек множества U_∂, сходящейся к решению задачи (19). Проверка выполнимости этого допущения весьма затруднительна. Поэтому рассмотрим другой метод приближенного решения задачи (19). Пусть $t\in R$, $t\geqslant 1$. Определим множество

$$U^{(t)}=\{h\mid h\in W_p^1(\Omega),\ \|h\|_{W_p^1(\Omega)}\leqslant tC,\ \check{h}\leqslant h\leqslant t\hat{h},\ f(h)\geqslant C_1(2-t)\}. \tag{21}$$

Здесь C, C_1, $\check{h}$, $\hat{h}$ — положительные постоянные из (17), $p>2$. Из сравнения (17) и (21) видно, что $U_\partial\subset U^{(t)}$, $U_\partial=U^{(1)}$.

Предполагая выполненными условия теоремы 4, для фиксированного t, такого, что $t>1$, $t\hat{h}\leqslant e_2$ (e_2 — положительная постоянная из (2)), рассмотрим задачу: найти функцию h_t, для которой

$$h_t\in U^{(t)},\ f_1(h_t)=\inf_{h\in U^{(t)}}f_1(h). \tag{22}$$

В силу теоремы 4 задача (22) имеет решение, при этом из вложения $U_\partial \subset U^{(t)}$ следует $f_1(h_t) \leqslant f_1(h_0)$, где h_0 — решение задачи (19).

Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечномерных подпространств в $W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию ( ), причем

$$H_n \subset H_{n+1} \ \forall n. \tag{23}$$

Рассмотрим задачу: найти функцию h_n, для которой

$$h_n \in H_n \cap U^{(t)} \ f_1(h_n) = \inf_{h \in H_n \cap U^{(t)}} f_1(h). \tag{24}$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и множество $U^{(t)}$ задается соотношениями (21) при $t > 1$, $t\hat{h} \leqslant e_2$. Пусть далее $\{H_n\}$ — последовательность конечномерных подпространств в $W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (14), (23) и h_0, h_t — решения задач (19), (22) соответственно. Допустим, что множество $H_1 \cap U^{(t)}$ не пустое. При любом n задача (24) имеет решение h_n, при этом $f_1(h_t) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_1(h_n) \leqslant f_1(h_0)$.*

Из последовательности $\{h_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h_m\}$ такую, что $h_m \to g$ слабо в $W_p^1(\Omega)$, $g \in U^{(t)}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} f_1(h_m) = \lim\limits_{n\to\infty} f_1(h_n) = f_1(g)$.

Отметим, что решение задачи (24) и функция g принадлежат $U^{(t)}$ и, вообще говоря, не принадлежат U_∂. Однако в силу того, что параметр t можно принять сколь угодно близким к единице, «выход функций h_n и g за область U_∂» можно сделать сколь угодно малым .

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Физматгиз, 1959, 656 с.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970, 512 с.
3. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970, 328 с.
4. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.

Институт механики
АН УССР

Поступила в редакцию
18.10.1978 г.