УДК 517.5+517.43

А. А. Панков

К теории почти-периодических псевдодифференциальных операторов

В связи с некоторыми задачами математической физики возрос интерес к изучению дифференциальных операторов с почти-периодическими (п.-п.) коэффициентами [1]. Известно [2], что для гипоэллиптических операторов вопрос об их обратимости в пространствах п.-п. функций эквивалентен аналогичному вопросу в $L^2(\mathbf{R}^n)$. В настоящей работе подобное утверждение установлено для широкого класса систем 1-го порядка, включающего, например, гиперболические. Таким образом, эквивалентность обратимости оператора в рассматриваемых пространствах не является спецификой гипоэллиптического случая. Этот результат оказывается тесно связанным с теоремой о совпадении слабых и сильных расширений в пространстве п.-п. функций Безиковича (теорема 1). Аналогичные факты получены также для п.-п. задачи Коши.

Введем некоторые обозначения [1]: $C_b(\mathbf{R}^n)$ — пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$ — пространство п.-п. функций на $\mathbf{R}^n$. Последнее канонически отождествляется с пространством $C(\mathbf{R}^n_B)$ непрерывных функций на боровской компактификации $\mathbf{R}^n_B$ пространства $\mathbf{R}^n$. Положим $C^m_b(\mathbf{R}^n)=\{\varphi\in C_b(\mathbf{R}^n)\mid\partial^\alpha\varphi\in C_b(\mathbf{R}^n),\ |\alpha|\leqslant m\}$, $\mathrm{CAP}^m(\mathbf{R}^n)=\{\varphi\in\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)\mid\partial^\alpha\varphi\in\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n),\ |\alpha|\leqslant m\}$, $C^\infty_b(\mathbf{R}^n)=\bigcap_{m\in\mathbf{Z}_+}C^m_b(\mathbf{R}^n)$, $\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)=\bigcap_{m\in\mathbf{Z}_+}\mathrm{CAP}^m(\mathbf{R}^n)=\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)\cap C^\infty_b(\mathbf{R}^n)$. Здесь $\mathbf{Z}_+=\{m\in\mathbf{Z}\mid m\geqslant 0\}$, $\partial=(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n)$, $\partial^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha|=\sum\alpha_i$ для $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}^n_+$. Через $B^2(\mathbf{R}^n)$ обозначается пространство п.-п. функций Безиковича, т. е. пополнение $\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$ по норме $\|\varphi\|^2_{B^2}=(\varphi,\varphi)_B=\mathbf{M}\{\varphi\cdot\overline{\varphi}\}$, где $\mathbf{M}$ — среднее значение п.-п. функции [1, 3]. Известно, что $B^2(\mathbf{R}^n)\simeq L^2(\mathbf{R}^n_B, d\mu)$, где $d\mu$ — нормированная мера Хаара на $\mathbf{R}^n_B$ (см., например, [1, 5]). Определим еще п.-п. пространства Соболева $H^s(\mathbf{R}^n_B)$, $s\in\mathbf{R}$, как пополнения $\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$ по нормам $\|\varphi\|^2_s=\sum_{\xi\in\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{\varphi}_\xi|^2$, где $\hat{\varphi}_\xi=(\varphi,\exp(i\xi\cdot x))_B$—преобразование Фурье—Бора, и положим $H^\infty(\mathbf{R}^n_B)=\bigcap_{s\in\mathbf{R}}H^s(\mathbf{R}^n_B)$, $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n_B)=\bigcup_{s\in\mathbf{R}}H^s(\mathbf{R}^n_B)$. Обычные соболевские пространства обозначаются через $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Класс п.-п. символов $a(x,\xi)$, $(x,\xi)\in\mathbf{R}^{2n}$, порядка m обозначим через APS^m $(-\infty\leqslant m\leqslant+\infty)$, а соответствующий класс псевдодифференциальных операторов

$$a(x,D)\,u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,\xi)\,u(y)\,dyd\xi \tag{1}$$

— через APL^m [1]. Интеграл в (1) понимается как осциллирующий. Операторы из APL^m естественным образом действуют в шкалах $H^s(\mathbf{R}^n)$ и $H^s(\mathbf{R}^n_B)$.

Рассмотрим теперь матричный псевдодифференциальный оператор $A = a(x, D)$ 1-го порядка (размеров $N \times N$) как неограниченный оператор в пространстве $B^2(\mathbf{R}^n)$* с областью определения $D(A) = \{u \in B^2(\mathbf{R}^n) \mid Au \in B^2(\mathbf{R}^n)\}$. Это слабое расширение оператора $a(x, D)$, заданного на $\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Действие A понимается в смысле $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n_B)$. Оператор A, очевидно, замкнут. Установим совпадение слабых и сильных расширений.

Теорема 1. *Пусть* $a(x, \xi) = a_1(x, \xi) + a_0(x, \xi)$, *где* $a_i(x, \xi) \in \mathrm{APS}^i$, $i = 0, 1$. *Предположим, что* $a_1(x, \xi)$ *положительно однороден степени* 1 *по* ξ *при больших* $|\xi|$. *Тогда пространство* $\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *плотно в* $D(A)$ *по норме графика.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы. Введем в рассмотрение фридрихсовские операторы усреднения. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ — такая неотрицательная функция, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 1$ и $\int \varphi(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$ и $\Phi_\varepsilon u = \varphi_\varepsilon * u = \varphi_\varepsilon(D)\,u$.

Лемма 1. 1. $\Phi_\varepsilon B^2(\mathbf{R}^n) \subset H^\infty(\mathbf{R}^n_B)$.

2. *Для* $u \in B^2(\mathbf{R}^n)$ *справедлива оценка* $\|\Phi_\varepsilon u\|_{B^2} \leqslant \|u\|_{B^2}$.

3. *Если* $u \in B^2(\mathbf{R}^n)$, *то* $\lim \Phi_\varepsilon u = u$ *в* $B^2(\mathbf{R}^n)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из общих теорем о действии п.-п. псевдодифференциальных операторов [1], если заметить, что $\Phi_\varepsilon \in \mathrm{APL}^{-\infty}$. Из теоремы о совпадении норм псевдодифференциальных операторов в $L^2(\mathbf{R}^n)$ и в $B^2(\mathbf{R}^n)$ [1] (на самом деле достаточно следствия 4.2 из этой работы) и известных L^2-оценок для Φ_ε (см., например, [4]) вытекает утверждение 2. В силу равномерной ограниченности норм Φ_ε утверждение 3 достаточно проверить на плотном в $B^2(\mathbf{R}^n)$ подпространстве $\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$. Но в этом случае ($\delta$-образность φ_ε) $\lim \Phi_\varepsilon u = u$ в равномерной норме, а, значит, и в $B^2(\mathbf{R}^n)$. Лемма доказана.

Пусть $b(x, \xi) \in \mathrm{APS}^0$— положительно однородный по ξ (при больших $|\xi|$) символ степени 0. Рассмотрим коммутаторы $T_\varepsilon = \left[\Phi_\varepsilon, b(x, D)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right]$.

Лемма 2. 1. *Нормы* T_ε *в* $B^2(\mathbf{R}^n)$ *равномерно ограничены.* 2. *Для любого* $u \in B^2(\mathbf{R}^n)$ $\lim T_\varepsilon u = 0$ *в* $B^2(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из соответствующего L^2-результата [6, 7[и теоремы о совпадении норм [1]. На основании 1-го утверждения в доказательстве 2-го можно считать, что $u \in \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Напомним, что для любого $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$ имеет место оценка

$$\|T_\varepsilon v\|_{L^2} \leqslant c \cdot \sup_{|z| \leqslant \varepsilon} \|v(\cdot + z) - v(\cdot)\|_{L^2}, \tag{2}$$

где константа $c > 0$ зависит только от $b(x, \xi)$ и $\varphi(x)$ (см. [6, 7], и, для случая $b(x, \xi) \equiv b(x)$, [4]). Выберем, следуя [1], семейство неотрицательных функций $\psi_R(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ так, что $\psi_R(x) = 1$ при $|x| \leqslant R$, $\psi_R(x) = 0$ если $|x| \geqslant R + R^\varkappa$ $(0 < \varkappa < 1)$ и $|\partial^\alpha \psi_R(x)| \leqslant C_\alpha R^{-\varkappa|\alpha|}$. Положим в (2) $v(x) = \psi_R(x)\,u(x)$, $u \in \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда

$$V_R^{-1} \cdot \|T_\varepsilon(\psi_R \cdot u)\|_{L^2}^2 \leqslant c^2 \cdot V_R^{-1} \cdot \sup_{|z| \leqslant \varepsilon} \|\psi_R(\cdot + z)\,u(\cdot + z) - \psi_R(\cdot)\,u(\cdot)\|_{L^2}^2, \tag{3}$$

где $V_R = \operatorname{mes}\{|x| \leqslant R\}$ ($\operatorname{mes}\Omega$ — лебегова мера множества Ω). Имеем

$$V_R^{-1} \cdot \|\psi_R(\cdot + z)\,u(\cdot + z) - \psi_R(\cdot)\,u(\cdot)\|_{L^2}^2 = V_R^{-1} \cdot [\|\psi_R(\cdot + z)\,u(\cdot + z)\|_{L^2}^2 + \|\psi_R(\cdot)\,u(\cdot)\|_{L^2}^2 - 2\operatorname{Re}(\psi_R(\cdot + z)\,u(\cdot + z), \psi_R(\cdot)\,u(\cdot))]. \tag{4}$$

---

* Оператор A действует на функциях со значениями в $\mathbf{C}^N$, но ради краткости используются те же обозначения пространств, что и в скалярном случае.

В силу [1, § 4]

$$\lim_{R\to\infty} V_R^{-1}\,\|\psi_R(\cdot+z)\,u(\cdot+z)\|_{L^2}^2 = \|u(\cdot+z)\|_{B^2}^2. \tag{5}$$

Заметим, что выражение под знаком предела на самом деле не зависит от z. Докажем равенство ($f\in \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$)

$$\mathbf{M}\{f\} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{V_R}\int \psi_R(x+z)\,\psi_R(x)\,f(x)\,dx, \tag{6}$$

где предел существует равномерно по z, когда z пробегает некоторое компактное множество $G\subset\mathbf{R}^n$. Положим

$$K_{z,R}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x+z|\leqslant R,\ |x|\leqslant R\},\quad V_{z,R}=\operatorname{mes} K_{z,R}.$$

Тогда $V_{z,R}=\operatorname{mes}(K_{0,R}\cap\{x \mid |x|\geqslant z\}) = V_R - c_1 z R^{n-1}$, откуда $\lim V_{z,R}\cdot V_R^{-1}=1$ равномерно по $z\in G$. Далее $\operatorname{mes}(K_{z,R+R^\varkappa}\setminus K_{z,R})\leqslant \operatorname{mes}(K_{0,R+R^\varkappa}\setminus K_{0,R}) = c_2 R^{n+\varkappa-1}$. Имеем $\dfrac{1}{V_R}\displaystyle\int \psi_R(x+z)\,\psi_R(x)\,f(x)\,dx = \dfrac{V_{z,R}}{V_R}\cdot\dfrac{1}{V_{z,R}}\int_{K_{z,R}} f(x)\,dx + \dfrac{1}{V_R}\int_{\mathbf{R}^n\setminus K_{z,R}} \psi_R(x+z)\,\psi_R(x)\,f(x)\,dx$. Здесь первое слагаемое равномерно по $z\in G$ стремится к $\mathbf{M}\{f\}$, а второе — $O(R^{\varkappa-1})$. Отсюда следует равенство (6).

В неравенстве (3) перейдем к пределу при $R\to\infty$. В силу леммы 4.1 из работы [1] предел левой части (3) равен $\|T_\varepsilon u\|_{B^2}^2$. Тогда из соотношений (4) — (6) вытекает оценка

$$\|T_\varepsilon u\|_{B^2}\leqslant c\cdot\sup_{|z|\leqslant\varepsilon}\|u(\cdot+z)-u(\cdot)\|_{B^2}. \tag{7}$$

Группа $\mathbf{R}^n$ непрерывно действует на $\mathbf{R}_B^n$ сдвигами. Соответствующие функциональные операторы сдвига $f(\cdot)\mapsto f(\cdot+z)$ сильно непрерывны по $z\in\mathbf{R}^n$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}_B^n, d\mu)\simeq B^2(\mathbf{R}^n)$. Отсюда и из неравенства (7) вытекает утверждение леммы 2. Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $a_0(x,D)$ ограничен в $B^2(\mathbf{R}^n)$, то можно считать, что $a(x,\xi)=a_1(x,\xi)$ положительно однороден по ξ степени 1 при больших $|\xi|$. По теореме Эйлера (при тех же ξ) $a(x,\xi)=\sum_{j=1}^n \xi_j\dfrac{\partial a}{\partial\xi_j}(x,\xi)$. Применение лемм 1 и 2 показывает, что $H^\infty(\mathbf{R}_B^n)$ плотно в $D(A)$ по норме графика. Поскольку $\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $H^\infty(\mathbf{R}_B^n)$ в соответствующей проективной топологии, то теорема доказана.

В качестве приложения теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 оператор $A=a(x,D)$ обратим в $B^2(\mathbf{R}^n)$ в том и только том случае, когда он обратим в $L^2(\mathbf{R}^n)$. При этом нормы оператора A^{-1} в пространствах $B^2(\mathbf{R}^n)$ и $L^2(\mathbf{R}^n)$ совпадают.*

Доказательство. Формально сопряженный оператор $A^+=a^+(x,D)$ также удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому операторы A и A^+ сопряжены в $B^2(\mathbf{R}^n)$ ($D(A^+)$ определяется аналогично $D(A)$). Далее (см., например, [6, 7]), $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $D(A,L^2)=\{u\in L^2(\mathbf{R}^n)\mid Au\in L^2(\mathbf{R}^n)\}$ по норме графика. То же верно и для A^+. Следовательно, A и A^+ сопряжены в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Как и в [1, § 4] $\inf\limits_{v\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\setminus 0}\frac{\|Av\|_{L^2}}{\|v\|_{L^2}}=\inf\limits_{u\in \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)\setminus 0}\frac{\|Au\|_{B^2}}{\|u\|_{B^2}}$ и аналогичное равенство имеет место для $A^*=A^+$. В силу теоремы 1 и ее L^2-варианта в последнем равенстве $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$ можно заменить соответственно на $D(A, L^2)$ и $D(A)$, что завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим задачу Коши

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-a(t, x, D)u=f(t, x),\ u(0, x)=u_0(x). \tag{8}$$

Предполагается, что символ $a(t, x, \xi)$ — непрерывная функция от $t\in[0, T]$ со значениями в APS^1 в естественной топологии. Пусть E — одно из пространств $L^2(\mathbf{R}^n)$ или $B^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда в $L^2(0, T; E)$ задача (8) задает замкнутые операторы L и L_0 с областями определения $D(L; E)=\{u\in L^2(0, T; E)\mid Lu\in L^2(0, T; E)\}$, $D(L_0; E)=\{u\in D(L; E)\mid u(0)=0\}$ соответственно. Последнее определение корректно: если $u\in D(L; E)$, то $a(t, x, D)u\in L^2(0, T; E_1)$, где $E_1=H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ или $H^{-1}(\mathbf{R}_B^n)$. Следовательно, $\partial u/\partial t\in L^2(0, T; E_1)$ и $u\in C([0, T]; E_1)$, т. е. для функций из $D(L; E)$ определены следы в E_1.

Лемма 3. *Пространство $\{v\in C^\infty([0, T];\ \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n))\mid v(0, x)=0\}$ плотно в $D(L_0; B^2(\mathbf{R}^n))$ по норме графика.*

Доказательство. Операторы Φ_ε коммутируют с $\partial/\partial t$, а все оценки в леммах 1 и 2 могут быть проведены равномерно по параметру $t\in[0, T]$. Следовательно, для любого $m\in\mathbf{Z}_+$ пространство $\{u\in L^2(0, T; H^m(\mathbf{R}_B^n))\mid \partial u/\partial t\in L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n)),\ u(0)=0\}$ плотно в $D(L_0; B^2(\mathbf{R}^n))$ по норме графика. Используя аппроксимации Бохнера — Фейера [1, 2] по переменным $x\in\mathbf{R}^n$, можно заменить $H^m(\mathbf{R}_B^n)$ на $\mathrm{CAP}^m(\mathbf{R}^n)$. Остается проделать стандартную регуляризацию по t (см., например, [8, с. 348]) с помощью сдвигов и усреднений. Лемма доказана.

Заметим также, что $C_0^\infty((0, T)\times\mathbf{R}^n)$ плотно в $D(L_0; L^2(\mathbf{R}^n))$ [6, 7].

Теорема 3. *Пусть $a(t, x, \xi)$ непрерывен по $t\in[0, T]$ в APS^1 и удовлетворяет условиям теоремы 1 для всех $t\in[0, T]$. Тогда задача Коши (8) однозначно разрешима в $L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))$ при любых $\{u_0, f\}\in B^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))$ тогда и только тогда, когда она однозначно разрешима в $L^2((0, T)\times\mathbf{R}^n)$ при любых $\{u_0, f\}\in L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2((0, T)\times\mathbf{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $u_0=0$. Как и в доказательстве теоремы 2 (с учетом леммы 3 и ее очевидного аналога для сопряженной задачи) оператор L_0^{-1} существует в $L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))$ в том и только том случае, когда он существует в $L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}^n))=L^2((0, T)\times\mathbf{R}^n)$. (Утверждения лемм 4.1 и 4.2 из [1] справедливы и для операторов с параметром).

В общем случае из однозначной разрешимости задачи (8) в $L^2(0, T; E)$ при всех $\{u_0, f\}\in E\times L^2(0, T; E)$ вытекает оценка

$$\|u\|_{L^2(0,T;E)}\leqslant c(\|Lu\|_{L^2(0,T;E)}+\|u(0)\|_E),\quad u\in D(L; E). \tag{9}$$

Из лемм 4.1 и 4.2 [1] видно, что оценка (9) для $E=B^2(\mathbf{R}^n)$ эквивалентна такой же оценке для $E=L^2(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, из однозначной разрешимости задачи Коши при любых данных в случае $E=L^2(\mathbf{R}^n)$ (для определенности) вытекает, что оператор $W\colon L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))\to B^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))$, $Wu=\{u(0), Lu\}$ имеет нулевое ядро и замкнутый образ. Пусть теперь $\{h, v\}\in B^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))$ — вектор, ортогональный к образу оператора W. Тогда $\int\limits_0^T(Lu, v)_B\,dt=0$ для всех $u\in C^\infty([0, T];\ \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n))$, $u(0, x)=0$. Следовательно, $L_0^*v=0$. По доказанному выше операторы L_0

и L_0^* обратимы в $L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))$ и, значит, $v=0$. Тогда, в силу ортогональности, $(u(0), h)_B = 0$ для всех $n \in C^\infty([0, T]; \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n))$. Поскольку следы этих функций при $t=0$ плотны в $B^2(\mathbf{R}^n)$, то $h=0$ и оператор W сюръективен.

Меняя ролями $B^2(\mathbf{R}^n)$ и $L^2(\mathbf{R}^n)$, завершаем доказательство.

Теорема 3 может быть применена к задаче Коши для скалярного уравнения

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \sum_{\substack{|\alpha|+j \leqslant m \\ j<m}} a_{\alpha j}(t, x) D_x^\alpha \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = f, \tag{10}$$

$$u(0) = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1, \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(0) = u_{m-1}, \tag{11}$$

где $a_{\alpha j} \in C([0, T]; \mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n))$. С помощью приема, принадлежащего Кальдерону [4, гл. 6, § 10], эта задача сводится к задаче Коши вида (8) системы псевдодифференциальных уравнений 1-го порядка. Введем обозначения: $\widetilde{u}(t) = \left(u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(t)\right)$, $\widetilde{H}(\mathbf{R}^n) = H^{m-1}(\mathbf{R}^n) \times \ldots \times H^0(\mathbf{R}^n)$, $\widetilde{H}(\mathbf{R}_B^n) = H^{m-1}(\mathbf{R}_B^n) \times \ldots \times H^0(\mathbf{R}_B^n)$.

В силу теоремы 3 справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Задача* (10), (11) *имеет единственное решение* $\widetilde{u} \in L^2(0, T; \widetilde{H}(\mathbf{R}_B^n))$ *для любых данных* $(\widetilde{u}_0, f) \in \widetilde{H}(\mathbf{R}_B^n)\, L^2(0, T; B^2(\mathbf{R}^n))$ *тогда и только тогда, когда она имеет единственное решение* $\widetilde{u} \in L^2(0, T; \widetilde{H}(\mathbf{R}^n))$ *при любых* $(\widetilde{u}_0, f) \in \widetilde{H}(\mathbf{R}^n)\, L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}^n))$.

Замечания. Во всех приведенных результатах можно заменить пространства $L^2(\mathbf{R}^n) = H^0(\mathbf{R}^n)$ и $B^2(\mathbf{R}^n) = H^0(\mathbf{R}_B^n)$ пространствами $H^s(\mathbf{R}^n)$ и $H^s(\mathbf{R}_B^n)$ соответственно с любым значением $s \in \mathbf{R}$. Действительно, обратимость $a(x, D)$ в $H^s(\mathbf{R}^n)$ (соответственно в $H^s(\mathbf{R}_B^n)$) эквивалентна обратимости оператора $(1+|D|)^s \circ a(x, D) \circ (1+|D|)^{-s}$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$ (соответственно в $B^2(\mathbf{R}^n)$). Теоремы 2—4 позволяют автоматически получить почти-периодические аналоги хорошо известных результатов об L^2-разрешимости для симметричных (или симметризуемых) систем, а также для строго гиперболических уравнений и систем.

1. Шубин М. А. Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными.— Успехи мат. наук, 1978, **33**, вып. 2, с. 3—47.
2. Шубин М. А. Теоремы о совпадении спектров псевдодифференциального почти-периодического оператора в пространствах $L^2(\mathbf{R}^n)$ и $B^2(\mathbf{R}^n)$. — Сиб. мат. журн., 1976, **17**, вып. 1 с. 200—215.
3. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953, 396 с.
4. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977, 504 с.
5. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. т.1, М.: Наука, 1975, 654 с.; т. 2, М.: Мир, 1975, 901 с.
6. Friedrichs K. O., Lax P. D. Boundary value problems for first order operators, Comm. Pure Appl. Math., 1965, v. 18, p. 365—388.
7. Агранович М. С. Граничные задачи для систем псевдодифференциальных операторов 1-го порядка,— Успехи мат. наук, 1969, **24**, вып. 1, с. 61—125.
8. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач: М.: Мир, 1972. 587 с.
9. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 101 с.
10. Киселев Ю. С. Почти-периодические интегральные операторы Фурье и гиперболические уравнения в пространствах почти-периодических функций. — Докл. АН СССР, 1979, **244**, № 1, с. 33—37.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
21.01.1980 г