УДК 519.4

С. К. Фаизов

Категории свободных идеалов

В последнее время в ряде работ выявилась важность понятия свободной категории — естественного теоретико-категорного аналога свободной алгебры (см. [1, 2]). Объектами свободной категории KГ над кольцом K, порожденной некоторым (ориентированным) графом Г являются вершины графа Г, а морфизмами — линейные комбинации путей с коэффициентами из кольца K (включая «пустые пути», по одному для каждой вершины, играющие роль единичных морфизмов). В настоящей статье мы переносим на свободные категории основные результаты работы [3] об идеалах свободных алгебр. Доказательства утверждений почти дословно повторяющие доказательства из [3] мы опускали.

Если $f: X \to Y$ — морфизм категории C, то X назовем началом, а Y — концом f. Множество морфизмов с началом X и концом Y обозначим $C(X, Y)$. Предположим, что все $C(X, Y)$ — векторные пространства над некоторым полем K, а умножение морфизмов билинейно. Правым (левым) C-модулем назовем ковариантный (контравариантный) функтор из категорий C в категорию Ab абелевых групп. Свободным модулем назовем прямую сумму представимых функторов. Подфунктор представимого ковариантного (контравариантного) функтора назовем правым (левым) идеалом категории C. Функторы и категории подразумеваем аддитивными.

Далее предположим, что в категории C нет изоморфных объектов, а $C(X, X) \neq 0$ и кольца $C(X, X)$ не содержат нетривиальные идемпотенты. Очевидно, свободная категория над полем K всегда обладает этими свойствами. Обозначим $\mathfrak{M}$ множество объектов категории C. Рангом свободного модуля $F = \bigoplus_{X \in \mathfrak{M}} h_X^{m_X}$ назовем функцию $r(F)$ на множестве $\mathfrak{M}$, сопоставляющую объекту X его «кратность вхождения» m_X. Естественно определяется семейство порождающих элементов модуля, причем легко видеть, что свободный модуль F конечнопорожден тогда и только тогда, когда все m_X конечны и, кроме того, $m_X = 0$ для всех $X \in \mathfrak{M}$ кроме конечного числа. В этом случае тождественные морфизмы $1_X \in h_X(X)$ образуют семейство порождающих, состоящее из $|r(F)| = \sum_{X \in \mathfrak{M}} r(F)(X)$ элементов.

Скажем, что F имеет единственный ранг, если он неизоморфен никакому свободному модулю P (при $r(F) \neq r(P)$).

Для любого набора $(X_1, \ldots, X_n)$ объектов из C (не обязательно разных), определим кольцо $M(C; X_1, \ldots, X_n)$, состоящее из матриц (φ_{ij}), где $\varphi_{ij} \in C(X_i, X_j)$, которые складываются и умножаются естественным образом. Обозначим $GL(C; X_1, \ldots, X_n)$ группу обратимых элементов этого кольца. Если F — свободный модуль, причем $|r| < \infty$, где $r = r(F)$, то его кольцо эндоморфизмов естественно отождествляются с $M(C, r) = M(C; X_1, \ldots, X_n)$, где $n = |r|$ и каждый объект X встречается в наборе $(X_1, \ldots, X_n)$ $r(X)$ раз.

Предположим, что a_i, b_i — такие морфизмы из C, что выполнено соотношение (*) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ (в частности, все a_i имеют общее начало A, все

b_i — общий конец B, и если $a_i: A \to X_i$, то $b_i: X_i \to B$). Обозначим $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$, где знак T обозначает транспонирование. Соотношение (*) можно записать в виде $ab = 0$. Назовем его тривиальным, если для каждого i либо $a_i = 0$, либо $b_i = 0$. Для любого вектора a или b указанного вида и для любой матрицы $\mu \in M(C; X_1, \ldots, X_n)$ определены произведения $a\mu$, μb. Будем говорить, что соотношение (*) тривиализуемо с помощью обратимой матрицы μ, если $(a\mu)(\mu^{-1}b) = 0$ — тривиальное соотношение.

Теорема 1. *Для любого натурального n эквивалентны следующие условия:*

а) *любое соотношение $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0$ в категории C при $m \leqslant n$ тривиализуемо с помощью некоторой обратимой матрицы;*

б) *любой правый (левый) идеал в C с $m \leqslant n$ порождающими является свободным модулем единственного ранга;*

в) *если F — свободный модуль над C, то любой его подмодуль, порожденный $m \leqslant n$ элементами, свободен и все свободные модули ранга r, где $|r| \leqslant n$, имеют единственный ранг.*

Категорию, удовлетворяющую условиям а)—в), назовем n-FI-категорией. Если C является n-FI-категорией для всех n, назовем ее полу-FI-категорией. Наконец, правой (левой) FI-категорией назовем категорию, в которой все правые (левые) идеалы являются свободными модулями единственного ранга.

Предложение 1. *Любой подмодуль свободного правого (левого) модуля над правой (левой) FI-категорией свободен.*

Наиболее важным классом полу-FI-категорий являются, по-видимому, категории со слабым алгоритмом в смысле следующего определения.

Пусть v — функция, определенная на множестве ненулевых морфизмов из C и принимающая неотрицательные целые значения. Назовем v фильтрацией, если выполнены следующие условия (для удобства далее считаем, что $v(0) = -\infty$): 1. $v(1_X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{M}$; 2. $v(a - b) \leqslant \max\{v(a), v(b)\}$; 3. $v(a \cdot b) \leqslant v(a) + v(b)$.

Обозначим $C_n = \{a \mid v(a) \leqslant n\}$ и $C_n(X, Y) = C_n \cap C(X, Y)$. Тогда $C_n(X, Y)$ — подпространство, в $C(X, Y)$, причем $C_n \subset C_{n+1}$, $C_i C_j \subset C_{i+j}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = C$, $1_X \in C_0$ для всех $X \in \mathfrak{M}$. Наоборот, задав набор C_n с указанными свойствами, можно восстановить фильтрацию v по формуле $v(a) = \min\{n \mid a \in C_n\}$.

Семейство морфизмов (a_i) категории C с общим началом назовем v-зависимым справа, если либо $a_i = 0$ для некоторого i, либо существуют морфизмы b_i с общим концом, такие что все произведения $a_i b_i$ определены и $v\left(\sum a_i b_i\right) < \max_i \{v(a_i) + v(b_i)\}$. В противном случае семейство (a_i) назовем v-независимым. Морфизм a назовем v-зависимым справа от семейства (a_i), если либо $a = 0$, либо найдутся такие b_i, что $v(a_i) + v(b_i) \leqslant v(a)$ для всех i, а $v\left(a - \sum_i a_i b_i\right) < v(a)$. Понятие v-зависимости слева определяется аналогично.

Будем говорить, что категория C обладает n-членным (правым) слабым алгоритмом относительно фильтрации v, если в любом v-зависимом справа относительно v семействе $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $m \leqslant n$, $v(a_1) \leqslant \ldots \leqslant v(a_m)$, один из элементов a_i v-зависим справа от $(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Если это условие выполняется для всех n, скажем, что C обладает слабым алгоритмом относительно фильтрации v.

Обозначим $GE(C; X_1, \ldots, X_n)$ подгруппу $GL(C; X_1, \ldots, X_n)$ порожденную всеми элементарными и диагональными матрицами, и $GE(C) = UGE(C;, X_1, \ldots, X_n)$.

Теорема 2. *Если категория C обладает n-членным слабым алгоритмом (относительно какой-нибудь фильтрации), то всякое соотношение в C вида $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0$ при $m \leqslant n$ тривиализуемо с помощью матрицы, лежащей в* $GE(C)$. В частности, C есть n-FI-категория.

Теорема 3. *Если категория C обладает слабым алгоритмом, то она является FI-категорией.*

Очевидно, C_0 является подкатегорией в C. Если C обладает 2-членным слабым алгоритмом, то, как легко видеть, C_0 полупроста, т. е. всякий не нулевой морфизм в ней обратим. В частности, $C_0(X, Y) = 0$ при $X \neq Y$, а $C_0(X, X)$ — тело.

Всякой фильтрованной категорией, т. е. категорией C, на которой задана фильтрация v, обычным образом можно сопоставить градуированную категорию $\operatorname{gr} C$ (аналог градуированной алгебры, см. [1]), полагая $(\operatorname{gr} C)_n(X,Y) = C_n(X, Y)/C_{n-1}(X, Y)$ и определяя умножение очевидным способом. Наоборот, если G — градуированная категория, то, полагая $\tilde{G}(X, Y) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} G_n \times (X, Y)$ мы получим категорию $\tilde{G}$ с естественной фильтрацией: если $a = \sum_n a_n$, где $a_n \in G_n$, то определим $v(a) = \max\{n \mid a_n \neq 0\}$. Очевидно, $\operatorname{gr} \tilde{G} \simeq G$.

Степенью $d(a)$ морфизма a градуированной категории G назовем тот номер m, для которого $a \in G_m$. Соотношение $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ в градуированной категории G назовем упорядоченным, если $d(a_1) \leqslant d(a_2) \leqslant \ldots \leqslant d(a_n)$. Заметим, что в силу определения градуированной категории см. [1], сумма $\Sigma a_i b_i$ имеет смысл только при $d(a_1 b_1) = d(a_2 b_2) = \ldots = d(a_n b_n)$. Поэтому в упорядоченном соотношении обязательно $d(b_1) \geqslant \ldots \geqslant d(b_n)$.

Зафиксируем последовательность $(d_1, \ldots, d_n) = D$ целых чисел, в которой $0 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Обозначим $\operatorname{Tr}_D(G; X_1, \ldots X_n)$ группу матриц (φ_{ij}), таких что $\varphi_{ij} = 0$ при $i > j$, $\varphi_{ii} = 1_{X_i}$ и $\varphi_{ij} \in G_{d_j - d_i}(X_i, X_j)$ при $i < j$ относительно обычного умножения матриц. Эта группа естественным образом действует на множестве векторов вида $(a_1, \ldots, a_n)$, где $d(a_j) - d(a_i) = d_j - d_i$, при $i < j$, причем конец a_i есть X_i; также на векторах вида $(b_1, \ldots, b_n)^T$, где начало b_i есть X_i, причем $d(b_i) - d(b_j) = d_j - d_i$ при $i < j$. Обозначим $\operatorname{Tr}_D(G) = \bigcup \operatorname{Tr}_D(G; X_1, \ldots, X_n)$ упорядоченное соотношение $ab = 0$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$ назовем Tr-тривиализуемым, если найдется матрица $\mu \in \operatorname{Tr}_D(G)$, где $D = (d(a_1), \ldots, d(a_n))$, такая что $(a\mu)(\mu^{-1}b) = 0$ — тривиальное соотношение.

Предложение 2. *Категория C обладает n-членным слабым алгоритмом относительно фильтрации v тогда и только тогда, когда в градуированной категории* $\operatorname{gr} C$ *всякое упорядоченное соотношение содержащее не более чем n элементов* Tr-*тривиализуемо.*

Следствие. *Существование n-членного слабого алгоритма относительно фильтрации v является лево-правосимметричным условием.*

Пусть S-полупростая подкатегория в C, содержащая все объекты C. Подмножество $M \subset \operatorname{Mor} C$ назовем S-порождающим справа (правым S-базисом), если для любых объектов X, Y множество $M \cap C(X, Y)$ порождает $C(X, Y)$ как векторное пространство над $S(Y, Y)$ (соответственно является базисом этого пространства).

Теорема 4. *Категория C обладает слабым алгоритмом относительно фильтрации v тогда и только тогда, когда C_0 — полупростая катего-*

рия, а в C существует v-независимое справа множество морфизмов B такое что $B \cap C_0 = \varnothing$ и одночлены от элементов B образуют C_0-порождающие справа подмножество. Если это условие выполнено, то одночлены от элементов B образуют правый C_0-базис, причем если $b_{ij} \in B$, а $\lambda_i \in C_0$, то $v(\Sigma b_{i1} \dots b_{in_i}\lambda_i) = \max_i \{v(b_{i1}) + \dots + v(b_{in_i})\}$.

Следствие 1. Пусть v такая фильтрация, что $C_0(X, X) = K$ *для любого X, а $C_0(X, Y) = 0$ при $X \neq Y$. Категория C обладает слабым v-алгоритмом тогда и только тогда, когда она является свободной категорией над полем K с v-независимым справа множеством свободных порождающих.*

Следствие 2. *Свободная категория над полем K является FI-категорией.*

Наряду со свободными категориями КГ* полезно рассматривать и пополненные свободные категории $\widehat{\text{КГ}}$, морфизмами которых служат формальные ряды вида $\sum\limits_n^{\infty} f_n$, где f_n—линейная комбинация путей длины n на Г. Такие категории обладают антифильтрацией и инверсным алгоритмом в смысле следующих определений.

Антифильтрация — это функция v, определенная на ненулевых морфизмах категории C, принимающая неотрицательные целые значения и обладающая такими свойствами (для удобства полагаем $v(0) = \infty$): 1. $v(a - b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\}$; 2. $v(ab) \geqslant v(a) + v(b)$.

Заметим, что здесь автоматически $v(1_X) = 0$. Определим $C^n = \{a \mid v(a) \geqslant n\}$ и $C^n(X, Y) = C^n \cap C(X, Y)$. Тогда $C^0 = C$, $C^n \supset C^{n+1}$, $C^iC^j \subset C^{i+j}$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C^n = 0$. В частности, C^n — идеал категории C. Вновь с C связана градуированная категория $\operatorname{gr} C$, в которой $(\operatorname{gr} C)_n(X, Y) = C^n(X, Y)/C^{n+1}(X, Y)$. Если вместо v рассматривать функцию $-v$, то получится то, что в [3] (для случая колец) называется отрицательной фильтрацией.

Определения v-зависимости переносятся на случай антифильтрации, если всюду изменить знак неравенства и вместо max писать min. Будем говорить, что категория C обладает n-членным правым инверсным алгоритмом относительно антифильтрации v, если в любом v-зависимом справа относительно v семействе $(a_1, \dots, a_m)$, где $m \leqslant n$ и $v(a_1) \leqslant \dots \leqslant v(a_m)$ один из a_i v-зависим справа от $(a_1, \dots, a_{i-1})$. Если это условие выполнено для всех n, скажем, что C обладает инверсным алгоритмом относительно v.

Предложение 3. *Категория C обладает n-членным инверсным алгоритмом тогда и только тогда, когда в градуированной категории* $\operatorname{gr} C$ *всякое упорядоченное соотношение* Tr — *тривиализуемо.*

Следствие. *Существование n-членного инверсного алгоритма относительно антифильтрации v является лево-правосимметричным условием.*

Антифильтрация v определяет топологию на категории C (т. е. такое семейство топологии на всех $C(X, Y)$, что умножение морфизмов непрерывно по совокупности аргументов), так что можно определить пополнение $\hat{C}$ категории C по этой фильтации. $\hat{C}$ допускает и чисто алгебраическое определение как $\lim C/C^n$.

Предложение 4. *Пусть C категория с антифильтрацией v, $\hat{C}$ — ее пополнение и (a_i) — семейство морфизмов из C.*

1. *Семейство (a_i) v-зависимо справа в C тогда и только тогда, когда оно v-зависимо справа в $\hat{C}$.*

---

* Свободными порождающими категориями КГ называются стрелки графа Г (пути длины 1).

2. *Морфизм a v-зависим справа от (a_i) в C тогда и только тогда, когда он v-зависим справа от (a_i) в $\hat{C}$.*

3. *C обладает n-членным инверсным алгоритмом относительно v тогда и только тогда, когда им обладает $\hat{C}$.*

Теорема 5. *Пусть C полная категория относительно антифильтрации v, обладающая n-членным инверсным алгоритмом. Тогда всякое соотношение вида $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0$ при $m \leqslant n$ тривиализуемо с помощью матрицы, лежащей в $GE(C)$. В частности, C есть n-FI-категория.*

Отметим, что если C обладает инверсным алгоритмом и полна относительно v, она вовсе необязана быть FI-категорией (см. [4]), хотя, конечно, является полу-FI-категорией. Однако верен следующий результат.

Теорема 6. *Если C обладает инверсным алгоритмом относительно антифильтрации v, то всякий правый (левый) идеал в C содержит свободный подмодуль, плотный в топологии, индуцированной антифильтрацией v.*

Если C обладает двучленным инверсным алгоритмом относительно антифильтрации v, то факторкатегория $F = C/C^1$ полупроста. Зафиксируем систему представителей $\bar{F}$ морфизмов из F в C, выбирая для простоты представителями нулевых морфизмов — нулевые, а единичных — единичные.

Теорема 7. *Пусть C полная категория, обладающая инверсным алгоритмом относительно антифильтрации v. Существует такое подмножество $B \subset C^1$, что любой морфизм из C однозначно представим в виде ряда $\Sigma a_{i1} a_{i2} \ldots a_{in_i} \lambda_i$, где $a_{ij} \in B$, $\lambda_i \in \bar{F}$ и для любого n среди членов ряда есть лишь конечное число таких, что $v(a_{i1} a_{i2} \ldots a_{in_i}) < n$.*

Имеет место и обратный результат (в виду предложения 4, в нем можно опустить условие полноты).

Теорема 8. *Пусть C категория с антифильтрацией v, причем $F = C/C^1$ — полупростая категория. Если C^1 содержит подмножество B такое, что все одночлены от B v-независимы справа и порождают с коэффициентами и $\bar{F}$ плотную подкатегорию в C, то C обладает инверсным алгоритмом.*

Категорию C с антифильтрацией v назовем связной, если $C(X, X) = F \oplus C^1(X, X)$ для любого $X \in \mathfrak{M}$.

Следствие 1. *Пусть C полная связная категория с антифильтрацией v. C обладает инверсным алгоритмом тогда и только тогда, когда она изоморфна пополненной свободной категории $\widehat{K\Gamma}$ для некоторого графа* Γ.

Следствие 2. *Пополненная свободная категория $\widehat{K\Gamma}$ является полу-FI-категорией.*

Приведем, наконец, еще один пример. Пусть S — полупростая категория и U — некоторый S-бимодуль [3]. Тогда можно определить тензорную категорию $T = T_S(U)$ как градуированную категорию, в которой $T^n = T \otimes_S T \otimes_S \ldots \otimes_S T$ (n раз), $T^1 = U$ и $T^0 = S$. Обозначим также $\hat{T}_S(U)$ пополнение $T_S(U)$ по естественной антифильтрации. Из теорем 4 и 8 непосредственно вытекает, что $T_S(U)$ обладает слабым алгоритмом, а $\hat{T}_S(U)$ инверсным алгоритмом (этот результат на языке колец фактически получен в работе [4]).

1. Клейнер М. М., Ройтер А. В. Представления дифференциальных градуированных категорий. Киев: 1977, с. 5—70.
2. Ройтер А. В. Матричные задачи и представления боксов. Киев: 1979, с. 3—38.
3. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975,
4. Роганов Ю. В. Наследственность тензорной алгебры и полунаследственность пополненной тензорной алгебры.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 5, с. 409—412

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию 28.01.1981 г.
после переработки — 3.03.1981 г.