УДК 513.88

М. З. Берколайко, В. И. Дмитриев

Несколько замечаний о вложениях пространств вещественной интерполяции

Пусть A_0, A_1 — банахова пара [1], E — идеальное [2] пространство функций на $\left((0, \infty), \dfrac{dt}{t}\right)$, $\min(1, t) \in E$. Через $(A_0, A_1)_E^K$ обозначаем банахово пространство, состоящее из всех элементов $a \in A_0 + A_1$, для которых конечна норма

$$\| a \|_{(A_0, A_1)_E^K} = \| K(\cdot, a; A_0, A_1) \|_E,$$

где $K(t, a; A_0, A_1) = \inf\limits_{a_0 + a_1 = a} (\| a_0 \|_{A_0} + t \| a_1 \|_{A_1})$, $t > 0$, — функционал Петре [1].

Мы опишем условия, наложенные на пару идеальных пространств E и F, выполнение которых обеспечивает вложение (непрерывное или компактное).

$$(A_0, A_1)_E^K \subset (A_0, A_1)_F^K. \tag{1}$$

1. Обозначим через Φ совокупность всех неотрицательных вогнутых на $(0, \infty)$ функций.

Очевидно следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е. Если для некоторого $c > 0$ $\| \varphi \|_F \leqslant c \| \varphi \|_E$ $(\varphi \in \Phi)$, то имеет место непрерывное вложение (1).

Теорема 1. *Если интегральный оператор*

$$(Lf)(t)=\int_0^\infty \min\left(1,\frac{t}{s}\right)f(s)\frac{ds}{s}$$

действует из E в F и является ограниченным, то имеет место непрерывное вложение (1).

Доказательство. Пусть $\varphi\in\Phi$. Тогда $(L\varphi)(t)\geqslant\int_0^t\frac{\varphi(s)}{s}ds\geqslant$ $\geqslant\int_0^t\frac{\varphi(t)}{t}dt=\varphi(t)$ и, следовательно, $\|\varphi\|_F\leqslant\|L\varphi\|_F\leqslant\|L\|_{E\to F}\|\varphi\|_E$. Теорема доказана.

Положим $\left\|\min\left(1,\frac{s}{t}\right)\right\|_E=\varphi_E(t)$, а для измеримой функции $W>0$ через $E(W)$ обозначим идеальное пространство функций с нормой $\|f\|_{E(W)}=$ $=\|Wf\|_E$ («весовое» E).

Теорема 2. *Если $E\cap L_\infty(\varphi_E)\subset F$ $\left(\text{или, тем более, } \frac{1}{\varphi_E}\in F\right)$ то имеет место непрерывное вложение* (1).

Доказательство. Если $\varphi\in\Phi$, то $\varphi(s)\geqslant\min\left(1,\frac{s}{t}\right)\varphi(t)$, откуда $\|\varphi\|_E\geqslant\left\|\min\left(1,\frac{s}{t}\right)\varphi(t)\right\|_E=\varphi_E(t)\varphi(t)$, т. е. $\|\varphi\|_E\geqslant\|\varphi\|_{L_\infty(\varphi_E)}$.

Далее, $\|\varphi\|_F\leqslant c\|\varphi\|_{E\cap L_\infty(\varphi_E)}=c\cdot\max(\|\varphi\|_E,\|\varphi\|_{L_\infty(\varphi_E)})=c\|\varphi\|_E$, где c — норма оператора вложения $E\cap L_\infty(\varphi_E)\subset F$.

Теорема доказана.

В случае, когда $E=L_p(t^{-\theta})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<\theta<1$, пространство $(A_0,A_1)_E^K$ принято обозначать $(A_0,A_1)_{\theta,p}$. Покажем, что известная теорема вложения $(A_0,A_1)_{\theta,p}\subset(A_0,A_1)_{\theta,q}$, $p\leqslant q$ (Ж. Л. Лионс—Ж. Петре) содержится в теоремах 1 и 2. На основании теоремы 1: оператор L ограничен из $L_p(t^{-\theta})$ в $L_q(t^{-\theta})$, так как $t^{-\theta}(Lf)(t)=\int_0^\infty\left(\frac{t}{s}\right)^{-\theta}\min\left(1,\frac{t}{s}\right)s^{-\theta}f(s)\frac{ds}{s}$, и, в силу неравенства Юнга—Хаусдорфа, $\|t^{-\theta}(Lf)(t)\|_{L_q}\leqslant\|t^{-\theta}\min(1,t)\|_{L_r}\|$ $\|t^{-\theta}f(t)\|_{L_p}$, где $\frac{1}{r}=1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. В силу теоремы 2: $\varphi_{L_p(t^{-\theta})}(t)=$ $=C_{\theta,p}t^{-\theta}$ и $(t^{-\theta}|f(t)|)^q\leqslant\|f\|^{q-p}_{L_\infty(t^{-\theta})}$, $(t^{-\theta}|f(t)|)^p$, откуда интегрированием получаем, что $\|f\|^q_{L_q(t^{-\theta})}\leqslant\|f\|^{q-p}_{L_\infty(t^{-\theta})}\ \|f\|^p_{L_p(t^{-\theta})}$, а, стало быть, $\|f\|^q_{L_q(t^{-\theta})}\leqslant$ $\leqslant\|f\|^q_{L_\infty(t^{-\theta})\cap L_p(t^{-\theta})}$, т. е. $L_q(t^{-\theta})\supset L_p(t^{-\theta})\cap L_\infty(t^{-\theta})$.

В качестве еще одного приложения теоремы 2 приведем некоторые условия вложения для обобщенных пространств Бесова [4].

Пусть M — симметричное на R_n (с мерой Лебега) пространство, обладающее свойством $M=M^{11}$; E — симметричное пространство на $\left((0,1);\frac{dt}{t}\right)$ [1]. Пусть $f\in M$. Через $\omega_k(f,t)_M$ обозначаем модуль непрерывности k-го порядка функции f по норме M. Пространства $B^{a,\rho}_{M,E}$ ($a\geqslant 0$ — целое) — это пространства функций $f \in M$, имеющих обобщенные по С. Л. Соболеву производные порядка $l=(l_1, \ldots, l_n)$ до $|l|=\sum_{i=1}^{n} l_i = a$ включительно и конечную норму:

$$\|f\|_{B^{a,\rho}_{M,E}} = \max\left(\|f\|_M, \sum_{|l|=a} \left\| \frac{\omega_k(f^{(l)}, \cdot)_M}{\rho(\cdot)} \right\|_E\right).$$

Здесь $\rho(t)$ — возрастающая на $(0, 1)$ функция, для которой функция $\rho(t)\,t^{-k}$ почти убывает. При $k=2$, $M=L_p$, $E=L_p\left((0, 1); \frac{dt}{t}\right)$, $\rho(t)=t^{r-a}$ получаем классические пространства Бесова $B^r_{p\theta}$ [3]. По поводу приведенного определения см. также определение липшицевых пространств Ю. А. Брудного и В. К. Шалашова [5].

Нетрудно проверить, что в наших условиях $\varphi_E(t) \geqslant C > 0$, поэтому, используя теорему 2 и формулу для K-функционала из [5], получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\rho_1/\rho_2 \in F$. *Тогда имеет место непрерывное вложение* $B^{a,\rho_1}_{M,E} \subset B^{a,\rho_2}_{M,F}$.

Например, если $\rho_i(t)=t^{r_i-a}$ $(r_1 \geqslant r_2,\ 0<r_i-a \leqslant 1,\ i=1, 2)$, то мы получаем, что $B^{r_1}_{M,E} \subset B^{r_2}_{M,F}$ при любых E и F, откуда при $M=L_p$, $E=L_\theta$, $F=L_r$ вытекает хорошо известное вложение [3]. Число подобных примеров нетрудно умножить. Отметим кроме того, что, изменяя очевидным образом понятие модуля непрерывности, полученный результат легко перенести на случай, когда функции заданы на произвольной измеримой области $\Omega \subset R_n$.

2. Назовем идеальное пространство функций F правильным, если для любой функции $\varphi \in \Phi \cap F$

$$\lim_{n\to\infty} \|(1-\chi_{\left(\frac{1}{n}, n\right)}(t))\,\varphi(t)\|_F = 0.$$

Для банахова пространства A положим $S_A=\{a \in A : \|a\|_A \leqslant 1\}$.

Теорема 4. *Пусть* 1) F *правильно;* 2) $\Phi \cap S_E$ *компактно в* F; 3) $S_{(A_0, A_1)^K_E}$ *компактно в* A_0+A_1. *Тогда имеет место компактное вложение* (1).

Доказательство. Условие 2) влечет непрерывное вложение $(A_0, A_1)^K_E \subset (A_0, A_1)^K_F$. Чтобы доказать, что $S_{(A_0, A_1)^K_E}$ — компактное множество в $(A_0, A_1)^K_F$, достаточно проверить [6] компактно ли $S_{(A_0, A_1)^K_E}$ в A_0+A_1 (условие 3) и что множество функций $\{K(t, x; A_0, A_1) : x \in S_{(A_0, A_1)^K_E}\}$ компактно в F (следует из 2). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 оператор L компактен и выполнены условия 1) и 3) теоремы 4. Тогда вложение (1) компактно.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 3) *теоремы* 4 *и* $\frac{1}{\varphi_E} \in F$. *Тогда вложение* (1) *компактно.*

Доказательство. Доказывая теорему 2, мы показали, что $\varphi(t) \leqslant \frac{1}{\varphi_E(t)}\|\varphi\|_E$, где $\varphi \in \Phi \cap E$. Поэтому в наших условиях функции из $\Phi \cap E$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы, что и приводит к выполнению требования 2) теоремы 4. Следствие доказано.

Из последнего утверждения, в частности, следует, что если пространство F правильное, то вложение $B^{r_1}_{p,E} \subset B^{r_2}_{p,E}$ $(M=L_p, r_1 \geqslant r_2)$ компактно.

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978, 400 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977, 744 с.
3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977, 456 с.
4. Берколайко М. З. Теоремы вложения оббощенных пространств Бесова и Гельдера.— Докл. АН СССР, 1980, **251**, № 3.
5. Брудный Ю. А. Теорема продолжения для одного семейства функциональных пространств.— Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 56, Л.: 1976, 170—173.
6. Дмитриев В. И. Относительно компактные множества в интерполяционных пространствах констант.— Сборник научных статей по прилож. функц. анализа. Воронеж: 1975, с. 31—41.

Воронежский
строительный институт

Поступила в редакцию 12.12.1979 г.
после переработки — 16.01.1981 г.