УДК 517.54

О. А. Бусовская, В. В. Горяйнов

О гомеоморфном продолжении спиральных функций

Введение. Пусть S — класс всех регулярных и однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных условиями $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Если $f \in S$, то $h_f(z) = zf'(z)/f(z)$ регулярная в E функция, которая не обращается в нуль при $z \in E$. Между свойствами функций f и h_f существует глубокая связь. В терминах области $h_f(E) = \{w = h_f(z) : z \in E\}$ определяются классы звездных и спиральных функций.

Регулярная в E функция $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots$ называется α—спиральной, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, если h_f регулярна в E и $\mathrm{Re}\{e^{i\alpha}h_f(z)\} > 0$ при $z \in E$. В [1] было показано, что всякая α—спиральная функция однолистна в E. Таким образом, S_α — совокупность всех α-спиральных функций—образует подмножество класса S. Отметим также, что при $\alpha = 0$ класс спиральных функций совпадает с S^*-множеством функций f из S, отображающих E на звездные, относительно начала координат, области.

В данной работе получены новые связи между свойствами функций f и h_f и на этой основе исследован вопрос о гомеоморфном продолжении спиральных функций в замыкание $\bar{E}$ единичного круга E. Полученные результаты прилагаются для получения достаточных условий однолистности в замкнутом круге.

Свойства отображения $f \to h_f$. Граничные свойства аналитической в единичном круге функции f тесно связаны с ростом ее производной f'. В связи с этим мы начнем наше исследование с изучения связи между ростом производной f' однолистной функции f и ростом связанной с ней функции h_f.

Обозначим через H^p, $p > 0$, класс регулярных в E функций f, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{0<r<1} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f \in S$. Тогда $f' \in H^p$, $p \geqslant 1$, в том и только том случае, если $h_f \in H^p$.*

Доказательство. Пусть $f' \in H^p$, $p \geqslant 1$. Тогда, в силу известного неравенства [2, с. 53], $(1 + |z|)^{-2} \leqslant |f(z)/z|$ $(z \in E)$ и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} |h_f(z)|^p d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|^p d\theta \leqslant 4^p \int_0^{2\pi} |f'(z)|^p d\theta, \quad z = re^{i\theta}.$$

Последнее неравенство указывает на принадлежность функции h_f классу H^p.

Допустим $h_f \in H^p$, $p \geqslant 1$. Тогда классу H^p принадлежит также функция $\omega(z) = (h_f(z) - 1)/z$ и, следовательно [2, с. 395], функция $\psi(z) = \int_0^z \omega(\zeta) d\zeta$ непрерывно продолжается в $\overline{E}$. Но тогда функция $f(z) = z \exp\{\psi(z)\}$ также непрерывно продолжается в $\overline{E}$ и ее модуль достигает там своего максимума $M = \max\{f(z) : z \in \overline{E}\}$. В силу принципа максимума модуля, имеем $|f(z)/z| \leqslant M$ при $z \in E$, и далее

$$\int_0^{2\pi} |f'(z)|^p d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z)}{z} \right|^p |h_f(z)|^p d\theta \leqslant M^p \int_0^{2\pi} |h_f(z)|^p d\theta, \quad z = re^{i\theta}.$$

Замечание. Как показывает пример функции Кебе $k(z) = z(1-z)^{-2}$, утверждение теоремы не имеет места при $p < 1$. Действительно, $k' \notin H^p$ при $p \geqslant 1/3$, в то время как функция $h_k(z) = (1+z)/(1-z)$ по теореме В. И. Смирнова [3, с, 93] принадлежит всем классам H^p при $0 < p < 1$.

Отметим теперь некоторые известные свойства спиральных функций и соотношения между f и h_f. Если $f \in S$, то для почти всех θ существует предел $\Phi_f(\theta) = \lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\theta})$. Если же $f \in S^*$, то либо предел $\Phi_f(\theta)$ существует, либо $f(re^{i\theta}) \to \infty$ при $r \to 1$ [4]. Последнее верно и для спиральных функций, поскольку между S_α, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ и $S^* = S_0$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое по формуле

$$f(z) = z\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right)^{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}, \quad f \in S^*, \quad \varphi \in S_\alpha,$$

где под степенью понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в единицу при $z = 0$. Далее, если $f \in S_\alpha$, то функция $H_f(z) = (1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha) h_f(z) - i\,\mathrm{tg}\,\alpha$ имеет в E положительную вещественную часть и $H_f(0) = 1$. Другими словами, H_f принадлежит классу C-Каратеодори. Как известно (см. [4] и соотношение между S_α и S^*), функция H_f имеет представление

$$H_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\mu_f(\theta), \tag{1}$$

где $\mu_f(\theta) = \theta + \lim\limits_{r \to 1} \arg\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, $z = re^{i\theta}$, а под аргументом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$. При этом функция $\mu_f(\theta)$ не убывает на интервале $0 < \theta < 2\pi$ и имеет на нем полное изменение, равное 2π.

Гомеоморфное продолжение. Поскольку для $f \in S_\alpha$ предел $\Phi_f(\theta)$ существует (возможно бесконечный) для всех θ, то можно считать, что каждая функция f из S_α продолжима в $\overline{E}$. Будем говорить, что f неоднолистно продолжается в $\overline{E}$, если существуют такие θ_1, θ_2, что $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ и $\Phi_f(\theta_1) = \Phi_f(\theta_2) \neq \infty$. В противном случае будем называть f однолистно продолжимой в $\overline{E}$.

Теорема 2. *Пусть $f \in S_\alpha$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: а) f неоднолистно продолжается в $\overline{E}$; б) h_f аналитически продолжается через некоторую дугу $\Gamma = \{z(\theta) = e^{i\theta} : \theta' < \theta < \theta''\}$*

и отображает ее на отрезок прямой $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}w\}=0$, *содержащий начало координат.*

Следствие. *Если* $f\in S_{\alpha_1}\cap S_{\alpha_2}$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, *то* f *однолистно продолжима в* $\overline{E}$.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Пусть $\Phi_f(\theta_1)=\Phi_f(\theta_2)\neq\infty$ и $0<\theta_2-\theta_1<2\pi$. Тогда $\mu_f(\theta_1)=\mu_f(\theta_2)$ и $\mu_f(\theta)$ тождественно постоянна в интервале (θ_1,θ_2). Из формулы (1) видно, что функция H_f, а, следовательно, и функции h_f и f, аналитически продолжаются через дугу $\Gamma=\{z(\theta)=e^{i\theta}:\theta_1<\theta<\theta_2\}$. Кроме того, в силу свойств интеграла Пуассона—Стилтьеса [2, с. 373], на дуге Γ имеем $\operatorname{Re}H_f(z)=0$ и $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}h_f(z)\}=0$. Поскольку $f(e^{i\theta_1})=f(e^{i\theta_2})$ и $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln|f(e^{i\theta})|=-\operatorname{Im}h_f(e^{i\theta})$, то на дуге Γ найдется такая точка $z=e^{i\theta_0}$, что $h_f(e^{i\theta_0})=0$. Таким образом, h_f аналитически продолжается на дугу Γ и отображает ее на отрезок прямой $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}w\}=0$, содержащий начало координат.

б) $\Rightarrow$ а). Допустим, что h_f аналитически продолжается через дугу $\Gamma=\{z(\theta)=e^{i\theta}:\theta'<\theta<\theta''\}$ и отображает ее на некоторый отрезок прямой $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}w\}=0$, содержащий начало координат. Условие $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}h_f(z)\}>0$ при $z\in E$ влечет однолистность функции h_f на Γ. Следовательно, на дуге Γ ее можно представить в виде $h_f(e^{i\theta})=ie^{-i\alpha}u(\theta)$, где $u(\theta)$ — строго монотонно убывающая функция, обращающаяся в нуль при некотором $\theta_0\in(\theta',\theta'')$. Но тогда $f(z)=z\exp\left\{\int\limits_0^z(h_f(\zeta)-1)\dfrac{d\zeta}{\zeta}\right\}$ также аналитически продолжается через дугу Γ и $f(e^{i\theta})=w_0\exp\{(1-i\operatorname{tg}\alpha)v(\theta)\}$ при $\theta'<\theta<\theta''$, где $w_0=z'\exp\left\{\int\limits_0^{z'}(h_f(\zeta)-1)\dfrac{d\zeta}{\zeta}\right\}$, $v(\theta)=-(\cos\alpha)\int\limits_{\theta'}^{\theta}u(t)\,dt$, $z'=e^{i\theta'}$. Полученное выражение функции f на дуге Γ показывает, что f отображает Γ на некоторую дугу L логарифмической спирали $\{w=w_0\exp((1-i\operatorname{tg}\alpha)t):-\infty<t<\infty\}$. При этом, поскольку $u(\theta)$ меняет знак, то точка $f(e^{i\theta})$ пробегает некоторую часть L дважды, когда θ пробегает значения от θ' до θ''. Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 1 и 2 дают достаточные условия гомеоморфного продолжения спиральной функции в замыкание единичного круга.

Рассмотрим вопрос о гладкости Φ_f. Для этого нам потребуются следующие определения. Пусть Λ — совокупность непрерывных комплекснозначных функций φ, определенных на $(-\infty,\infty)$. Через Λ_β, $0<\beta\leqslant1$, обозначим множество функций φ из Λ, выделяемое условием $\omega(\delta;\varphi)=O(\delta^\beta)$ при $\delta\to0$, $\delta>0$, где

$$\omega(\delta;\varphi)=\sup\{|\varphi(t')-\varphi(t'')|:|t'-t''|<\delta\}$$

— модуль непрерывности функции φ. Введем также в рассмотрение класс Λ_* функций φ из Λ, удовлетворяющих условию $|\varphi(t+\delta)+\varphi(t-\delta)-2\varphi(t)|=O(\delta)$ при $\delta\to0$.

Теорема 3. *Пусть* $f\in S_\alpha$, $-\pi/2<\alpha<\pi/2$, *и* g — *регулярная и однолистная в* E *функция, удовлетворяющая условиям* $g(0)=1$, $h_f(E)\subseteq g(E)$. *Тогда*

а) *если* $\sup\{(1-|z|)^{1-\beta}|g(z)|:z\in E\}<\infty$, $0<\beta\leqslant1$, *то* f *непрерывно продолжается в* $\overline{E}$ *и* $\Phi_f\in\Lambda_\beta$;

б) *если* $\sup\{(1-|z|)|g'(z)|:z\in E\}<\infty$, *то* f *непрерывно продолжается в* $\overline{E}$ *и* $\Phi_f\in\Lambda^*$;

в) *если* $\sup\{(-\ln(1-|z|))^{-1}|g(z)|: z\in E\}<\infty$, *то* f *непрерывно продолжается в* $\bar{E}$ *и* $\omega(\delta;\Phi_f)=O(-\delta\ln\delta)$.

Доказательство. а) Из условий теоремы следует, что h_f подчинена g, т. е.

$$h_f(z)=g(\varphi(z)), \tag{2}$$

где φ — регулярная в E функция, удовлетворяющая условию $|\varphi(z)|\leqslant|z|$ при $z\in E$. Отсюда получаем $(1-|z|)^{1-\beta}|h_f(z)|=(1-|z|)^{1-\beta}|g(\varphi(z))|\leqslant\leqslant(1-|\varphi(z)|)^{1-\beta}|g(\varphi(z))|$ и $\sup\{(1-|z|)^{1-\beta}|h_f(z)|: z\in E\}<\infty$. По теореме Харди—Литльвуда [2, с. 397] функция $\ln\frac{f(z)}{z}=\int\limits_0^z(h_f(\zeta)-1)\frac{d\zeta}{\zeta}$ непрерывно продолжается в $\bar{E}$. Но тогда $\sup\limits_{z\in E}(1-|z|)^{1-\beta}|f'(z)|=\sup\limits_{z\in E}(1-|z|)^{1-\beta}\left|\frac{f(z)}{z}\right||h_f(z)|<\infty$ и доказываемое утверждение следует из теоремы Харди—Литльвуда.

б) Как и в предыдущем случае h_f подчинена g и, следовательно, имеет место (2). Из инвариантной формы леммы Шварца [2, с. 319] имеем $|\varphi'(z)|\leqslant\leqslant(1-|\varphi(z)|^2)(1-|z|^2)^{-1}$, откуда, учитывая формулу (2), получаем $(1-|z|)|h_f'(z)|=(1-|z|)|\varphi'(z)||g'(\varphi(z))|\leqslant(1-|\varphi(z)|)|g'(\varphi(z))|$ и $\sup\{(1-|z|)|h_f'(z)|: z\in E\}<\infty$. Но тогда $|h_f(z)|=O(-\ln(1-|z|))$ и по теореме Харди—Литльвуда $\ln(f(z)/z)$ непрерывно продолжается в $\bar{E}$. Отсюда и из равенства $zf''(z)=\frac{f(z)}{z}h_f(z)(h_f(z)-1)+f(z)h_f'(z)$ получаем $\sup\{(1-|z|)|f''(z)|: z\in E\}<\infty$, и доказываемое утверждение вытекает из теоремы Зигмунда [5, с. 76].

Утверждение в) доказывается аналогично.

Достаточные условия однолистности. Пусть $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ — регулярная в E функция и $f(z)/z\neq 0$ при $z\in E$. Тогда условие $h_f(E)\subseteq\{w: \operatorname{Re} w>0\}$ достаточное, чтобы f была однолистной в E. Вопрос о достаточных условиях однолистности в замкнутом круге связан с дополнительными ограничениями на f и h_f (см., например, [6]). Естественным представляется получение таких условий в терминах ограничений лишь на область $h_f(E)$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ — *регулярная в* E *функция,* $f(z)/z\neq 0$ *при* $z\in E$ *и* $h_f(E)\subseteq G$, *где* G — *выпуклая область, удовлетворяющая условиям*:

а) G *не содержит начала координат*;

б) *при любых* $\rho>0$ *и* $0\leqslant\beta\leqslant 2\pi$ *пересечение полукруга* $\{w: |w|<\rho, \operatorname{Re}(e^{i\beta}w)>0\}$ *с дополнением области* G *не пусто*;

в) $g\in H^1$, *где* g — *конформное отображение круга* E *на* G, *нормированное равенством* $g(0)=1$.

Тогда f *однолистна в* $\bar{E}$, *гомеоморфно продолжается в* $\bar{E}$ *и отображает* E *на область, ограниченную спрямляемой жордановой кривой.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что область G содержит точку $w=1=h_f(0)$ и h_f подчинена g. Кроме того, поскольку G выпукла и не содержит начала координат, то найдется такое $\alpha\in(-\pi/2, \pi/2)$, что $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}w\}>0$ при $w\in G$. Таким образом, $f\in S_\alpha$ и, следовательно, однолистна в E. Условие б), согласно теореме 2, позволяет заключить об однолистной продолжимости f в $\bar{E}$. Далее, из условия в) и того, что h_f подчинена g, по теореме Рогозинского [2, с. 357] получаем принадлежность функции h_f классу Харди H^1. Но тогда по теореме 1 имеем $f'\in H^1$, что влечет спрямляемость границы области $f(E)$ и непрерывную продолжимость f в $\bar{E}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я: 1. В условии теоремы требование выпуклости области G можно заменить на условие ее размещения в некоторой полуплоскости $\mathrm{Re}\{e^{i\alpha}w\} > 0$.

2. Из доказательства теоремы видно, что исключение условия в) не влияет на справедливость заключения об однолистной продолжимости f в $\bar{E}$. Измененная в соответствии с этим замечанием формулировка теоремы является усилением (применительно к звездным функциям) результата [7].

1. Š p a č e k L. Contribution á la theorie des fonctions univalentes. Časopis Pést. Math., 1933, 62, p. 12—19.
2. Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М:. Наука, 1966. 628 с.
3. П р и в а л о в И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1950. —336 с.
4. K e o g h F. R. Some theorems on conformal mapping of bounded star-shaped domains.— Proc. London. Math. Soc., 1959, 9, p. 481—491.
5. D u r e n P. Theory of H^p spaces. New — York and London, Akademis Press, 1970. 260 p.
6. А к с е н т ь е в Л. А. Элементарные признаки однолистности по граничным характеристикам.— Известия высших учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, с. 3—8.
7. E e n i g e n b u r g P. L. Boundary behavior of starlike functions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 33, N 2, p. 428—432.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редакцию 15.01.1980 г.