УДК 519.21

П. М. Васич, Й. Е. Печарич

О некоторых неравенствах для вогнутых функций и вогнутых последовательностей

В данной статье получены некоторые неравенства для вогнутых функций и вогнутых последовательностей аналогичные известным неравенствам Чебышева.

Пусть

$$T_m(f_1, \dots, f_m, p) = \frac{\left(\int\limits_a^b p(x)\,dx\right)^{m-1}\left(\int\limits_a^b p(x)\prod\limits_{j=1}^m f_j(x)\,dx\right)}{\prod\limits_{j=1}^m\left(\int\limits_a^b p(x) f_j(x)\,dx\right)}$$

и

$$T_m(a_1, \dots, a_m, p) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n p_i\right)^{m-1}\left(\sum\limits_{i=1}^n p_i a_{1i}\dots a_{mi}\right)}{\prod\limits_{j=1}^m\left(\sum\limits_{i=1}^n p_i a_{ji}\right)}.$$

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть f_1 и f_2 — интегрируемые, неотрицательные и вогнутые функции на $[a, b]$. Если f_2 — неубывающая функция, то выполняются неравенства*

$$T_2(x-a, b-x; p) \leqslant T_2(f_1, f_2; p) \leqslant T_2(x-a, x-a; p), \tag{1}$$

а если f_2 — невозрастающая функция, то выполняются неравенства

$$T_2(x-a, b-x; p) \leqslant T_2(f_1, f_2; p) \leqslant T_2(b-x, b-x; p). \tag{2}$$

Доказательство. Для интегрируемых и неубывающих на отрезке $[a, b]$ функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ имеет место следующее известное неравенство Чебышева

$$\int_a^b P(x)\,dx \int_a^b P(x)\,F_1(x)\,F_2(x)\,dx \geqslant \int_a^b P(x)\,F_1(x)\,dx \int_a^b P(x)\,F_2(x)\,dx. \qquad (3)$$

Если же $F_1(x)$, $F_2(x)$ — функции, интегрируемые и невозрастающие на отрезке $[a, b]$, то выражение, стоящее в левой части неравенства (3), не превосходит выражения, стоящего в его правой части.

Так как, f_1 и f_2 — неотрицательные и вогнутые на $[a, b]$, то, следовательно, функции $x \to f_i(x)/(x-a)$ $(i=1, 2)$ — невозрастающие, а функции $x \to f_i(x)/(b-x)$ $(i=1, 2)$ — неубывающие.

Пусть f_2 — неубывающая функция. Заменами $P(x) = p(x)(b-x)$, $F_1(x) = \dfrac{f_1(x)}{b-x}$, $F_2(x) = f_2(x)$, из (3) получаем

$$\int_a^b p(x)(b-x)\,dx \int_a^b p(x)\,f_1(x)\,f_2(x)\,dx \geqslant \int_a^b p(x)\,f_1(x)\,dx \int_a^b p(x)(b-x)\,f_2(x)\,dx. \qquad (4)$$

Если же в (3) положить $P(x) = p(x)(x-a)$, $F_1(x) = (b-x)$, $F_2(x) - \dfrac{f_2(x)}{x-a}$, то получим следующее неравенство

$$\int_a^b p(x)(x-a)\,dx \int_x^b p(x)(b-x)\,f_2(x)\,dx \geqslant \int_a^b p(x)(x-a)(b-x)\,dx \times$$
$$\times \int_a^b p(x)\,f_2(x)\,dx. \qquad (5)$$

Комбинируя неравенства (4) и (5), получаем первое из неравенств (1). Аналогично доказывается неравенство в правой части соотношения (1), а также соотношения (2).

Примечания. 1) Теорема 1 в случае, когда $p(x) = 1$ $(x \in [a, b])$ доказана в [1]. Отметим также работу [2, с. 385—386], где не предполагалось, что f_2 является монотонной функцией. Однако, используя перестановку функций, указанный результат из [2] можно получить в качестве следствия из теоремы 1. 2) Очевидно, что $T_2(x-a, b-x; p) \leqslant 1$ и $T_2(x-a, x-a, p)$, $T_2(b-x, b-x; p) \geqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — интегрируемые, неотрицательные и вогнутые функции на $[a, b]$ и пусть p — неотрицательная функция на $[a, b]$. Если $f_1, \ldots, f_m$ — неубывающие функции, тогда имеет место неравенство*

$$T_m(f_1, \ldots, f_m; p) \leqslant T_m(x-a, \ldots, x-a; p), \qquad (6)$$

а если $f_1, \ldots, f_m$ — невозрастающие функции, тогда имеет место неравенство

$$T_m(f_1, \ldots, f_m; p) \leqslant T_m(b-x, \ldots, b-x, p). \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — неубывающие функции. Заменами $P(x) = p(x)(x-a)$, $F_1(x) = \dfrac{f_i(x)}{x-a}$, $F_2(x) = f_{i+1}(x) \ldots f_m(x)(x-a)^{i-1}$, при $i = 1, \ldots, m-1$, и $P(x) = p(x)(x-a)$, $F_1(x) = \dfrac{f_m(x)}{x-a}$, $F_2(x) = (x-a)^{m-1}$ в соотношении типа (3) с противоположным знаком неравенства, .

получаем

$$\int_a^b p(x)(x-a)\,dx \int_a^b p(x) f_1(x) \ldots f_m(x)(x-a)^{i-1}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_p^b p(x) f_i(x)\,dx \int_a^b p(x) f_{i+1}(x) \ldots f_m(x)(x-a)^i\,dx \quad (i+1, \ldots, m-1), \qquad (8)$$

и

$$\int_a^b p(x)(x-a)\,dx \int_a^b p(x) f_m(x)(x-a)^{m-1} dx \leqslant \int_a^b p(x) f_m(x)\,dx \int_a^b p(x)(x-a)^m dx. \qquad (9)$$

Комбинируя (8) при $i = 1, \ldots, m-1$ и (9), получаем (6). Аналогично доказывается и неравенство (7).

Примечания. 3) Теорема 2 для случая $p(x) = 1$ доказана в [3] (см. также [4], где отсутствует предположение о монотонности функций). 4) Очевидно, что $T_m(x-a, \ldots, x-a; p)$, $T_m(b-x, \ldots, b-x; p) \geqslant 1$.

Предположим, что некоторая последовательность a удовлетворяет условиям

$$a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} \leqslant 0 \quad (i = 2, \ldots, n-1). \qquad (10)$$

Тогда последовательность a является вогнутой, и, очевидно, что

$$\sum_{i=2}^{k-1} (i-1)(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=k}^{n-1} (n-i)(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) \leqslant 0,$$

т. е. $(k-2)(a_k - a_1) \leqslant (k-1)(a_{k-1} - a_1)$ и $(n-k)(a_{k-1} - a_n) \leqslant (n-k+1)(a_k - a_n)$. Следовательно, последовательности $\frac{a_k - a_1}{k-1}$, $k = 2, \ldots, n$ и $\frac{a_n - a_k}{n-k}$, $k = 1, \ldots, n-1$ — невозрастающие. Если $a_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, тогда последовательность $\frac{a_k}{k-1}$, $k = 2, \ldots, n$, — невозрастающая, а последовательность $\frac{a_k}{n-k}$, $k = 1, \ldots, n-1$, — неубывающая.

Теперь можем доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть a и b — неотрицательные и вогнутые последовательности, а p — неотрицательная последовательность. Если $в$ — неубывающая последовательность, тогда*

$$T_2(I_n, J_n; p) \leqslant T_2(a, b; p) \leqslant T_2(I_n, I_n; p), \qquad (11)$$

где $I_n = (0, 1, \ldots, n-1)$, $J_n = (n-1, \ldots, 1, 0)$. *Если b — невозрастающая последовательность, тогда*

$$T_2(I_n, J_n; p) \leqslant T_2(a, b; p) \leqslant T_2(J_n, J_n; p) \qquad (12)$$

Доказательство. Известно следующее неравенство Чебышева

$$\sum_{i=1}^n P_i \sum_{i=1}^n P_i A_i B_i \geqslant \sum_{i=1}^n P_i A_i \sum_{i=1}^n P_i B_i, \qquad (13)$$

где $A = (A_1, \ldots, A_n)$ и $B = (B_1, \ldots, B_n)$ — неотрицательные вогнутые последовательности, причем B — неубывающая последовательность. Пусть b — неубывающая последовательность. Заменами $P_i = p_i(i-1)$, $A_i = \frac{a_i}{i-1}$,

$B_i = b_i$ $(i = 2, \ldots, n)$, и $P_1 = A_1 = 0$, $B_1 = b_1$ (если $a_1 = 0$), или $P_1 = p_1\varepsilon_1$, $A_1 = \frac{a_1}{\varepsilon_1}$, $B_1 = b_1$ $(a_1 > 0)$, где $0 < \varepsilon_1 \leqslant \frac{a_1}{a_2}$, при условии, что $\varepsilon_1 \to 0$, из соотношения (13) с противоположным знаком неравенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (i-1) \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i (i-1) b_i. \tag{14}$$

Аналогично устанавливается и неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (i-1) \sum_{i=1}^{n} p_i (i-1) b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i (i-1)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i b_i. \tag{15}$$

Комбинируя (14) и (15), получаем второе неравенство в (11).

Аналогичным способом можно доказать первое неравенство в (11), неравенства (12) и теорему.

Теорема 4. *Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — неотрицательные вогнутые последовательности, и пусть p — неотрицательная последовательность. Если $a_1, \ldots, a_m$ — неубывающие последовательности, тогда*

$$T_m(a_1, \ldots, a_m; p) \leqslant T_m(I_n, \ldots, I_n; p),$$

а если $a_1, \ldots, a_m$ — невозрастающие последовательности, тогда

$$T_m(a_1, \ldots, a_m; p) \leqslant T_m(J_n, \ldots, J_n; p).$$

Примечание: 5) Второе из неравенств в (11) доказано Р. Т. Рахмаилом в [5]. При этом предполагалось, что $a_1 = b_1 = 0$, и, что a и b — неубывающие последовательности. Обобщение неравенства Рахмаила приведено в [6]. Аналогично можем доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть a и b — неотрицательные вогнутые последовательности, и пусть p — неотрицательная последовательность.*

а) *Если в b — монотонная последовательность, тогда имеют место неравенства*

$$C_n^1(a, b; p) \geqslant C_{n-1}^1(a, b; p) \geqslant \ldots \geqslant C_2^1(a, b; p) \geqslant 0,$$

где

$$C_k^1(a, b; p) = \sum_{i=1}^{k} p_i (i-1) \sum_{i=1}^{k} p_i (n-i) \sum_{i=1}^{k} p_i a_i b_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} p_i (i-1)(n-i) \sum_{i=1}^{k} p_i a_i \sum_{i=1}^{k} p_i b_i.$$

б) *Если b — неубывающая последовательность, тогда имеют место неравенства*

$$C_n^2(a, b; p) \leqslant C_{n-1}^2(a, b; p) \leqslant \ldots \leqslant C_2^2(a, b; p) \leqslant 0,$$

где

$$C_k^2(a, b; p) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i (i-1)\right)^2 \sum_{i=1}^{k} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{k} p_i (i-1)^2 \sum_{i=1}^{k} p_i a_i \sum_{i=1}^{k} p_i b_i.$$

в) *Если b — невозрастающая последовательность, тогда имеют место неравенства*

$$C_n^3(a, b; p) \leqslant C_{n-1}^3(a, b; p) \leqslant \ldots \leqslant C_2^3(a, b; p) \leqslant 0,$$

где

$$C_k^3(a, b; p) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i (n-i)\right)^2 \sum_{i=1}^{k} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{k} p_i (n-i)^2 \sum_{i=1}^{k} p_i a_i \sum_{i=1}^{k} p_i b_i.$$

1. D. G. B a r n e s. Some Complements of Hölder's Inequality. J. Math. Anal. Appl. 26 (1969), 82—87.
2. D. S. M i t r i n o v i c. (In cooperation with P. M. VASIĆ): Analytic Inequalities. Berlin — Heidelberg — New York, 1970.
3. M. J. F a v a r d. Sur les valeurs moyennes. Bull. Sci. Math. (2) 57 (1933), 54—64.
4. L. B e r w a l d. Verallgeinerung eines mittelwerfsatzes von J. Favard für positive konkave funktionen. Acta Math, 79 (1947), 17—37.
5. P. T. Р а х м а и л Уточнения и обращения некоторых неравенств для выпуклых и вогнутых последовательностей. Укр. мат. журн., 1978, **30**, 6, с. 840—845.
6. P. M. V a s i c and J. E. P e č a r i ć. Notes on some inequalities for convex sets and for k-convex functions. Mat. Vesnik (Beograd) (in print).

Югославия

Поступила в редакцию
11.03.1980 г.